

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

**Zobecnění magických ohodnocení a jejich využití  
při losování sportovních turnajů**

**Generalization of magic graph labelings and its  
application to tournament scheduling**

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Matěj Krbeček**

Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103T031 Výpočetní matematika

Téma: **Zobecnění magických ohodnocení a jejich využití při losování sportovních turnajů**  
**Generalization of magic graph labelings and its application to tournament scheduling**

Zásady pro vypracování:

Magická ohodnocení grafů patří mezi klasická témata teorie grafů. Existuje řada různých typů magických ohodnocení. Ukazuje se, že tzv. "distance magic" ohodnocení a tzv. "handicapové" ohodnocení mají pěknou aplikaci při sestavování neúplných sportovních turnajů.

Vzhledem k teoretickým omezením není možno konstruovat "distance magic" ohodnocení pro grafy s lichou pravidelností, tj. spravedlivé neúplné turnaje, kdy týmy hrají lichý počet zápasů. I "handicapová" ohodnocení, kdy plánované zápasy jsou obtížnější pro silnější týmy, mají omezenou množinu parametrů, pro které je možno taková ohodnocení konstruovat.

Cílem práce je hledat taková zobecnění magických ohodnocení, která přirozeným způsobem uvolní některý požadavek z definice a umožní najít odpovídající ohodnocení a tedy i návrh odpovídajícího spravedlivého neúplného turnaje. Součástí práce bude i nalezení tříd grafů, které taková ohodnocení mají.

Práci lze rozdělit do následujících částí:

- magická ohodnocení grafů, studium známých výsledků a technik
- zobecnění "distance magic" ohodnocení a "handicapové" ohodnocení, které umožní plánování spravedlivých neúplných turnajů, za mírnějších omezení
- sestavení tříd grafů, které mají taková ohodnocení
- interpretace teoretických výsledků v kontextu praktické aplikace plánování sportovních soutěží

Seznam doporučené odborné literatury:

Literatura:

- W. Wallis: Magic graphs, Birkhauser 2000.
- M. Bača, M. Miller: Super Edge-Antimagic Graphs, Brown, Walkers Press, 2008.
- J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, The Electronic Journal of Combinatorics, DS 6 (2011).
- odborné články a texty podle pokynů vedoucího

2

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7. května 2014

.....

Velice děkuji vedoucímu mé diplomové práce panu doc. Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za čas, který mi během psaní této práce věnoval, za jeho cenné rady, návrhy a připomínky. Bez jeho pomoci by práce v této podobě nikdy nevznikla. Dále bych chtěl poděkovat všem lidem, kteří mě při mém studiu podporovali, zejména mým rodičům, kteří mě neustále povzbuzovali a hnali vpřed.

## Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou magického ohodnocení. Shrnuje základní druhy magických ohodnocení, nejdůležitější výsledky a udává přehledné příklady daného ohodnocení při plánování sportovních turnajů. Přináší také nové výsledky v podobě zobecnění hendikepového ohodnocení, kdy zavádíme takzvané upravené hendikepové ohodnocení, které přirozeným způsobem uvolňuje požadavek nutnosti uspořádání labelů vrcholu do aritmetické posloupnosti  $\{1, 2, \dots, n\}$  i pro grafy, které mají množinu labelů  $\{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \cup \{\frac{n+4}{2}, \dots, n+1\}$ . Pro toto nově zdefinované vrcholové ohodnocení je zde zcela vyřešena existence ohodnocení pro třídu 2-pravidelných grafů.

**Klíčová slova:** sportovní turnaje, magické ohodnocení, hendikepové ohodnocení, upravené hendikepové ohodnocení, 2-pravidelné grafy

## Abstract

This bachelor thesis deals with magic labeling. The thesis summarizes basic types of the magic labeling, the most important results, and presents clear examples of the labeling when planning sports tournaments. It also provides new results in a form of the generalized handicap labeling where a so-called modified handicap labeling is introduced which naturally removes the requirement of the arrangement of vertex labels into an arithmetic progression  $\{1, 2, \dots, n\}$ , even also for graphs which have labels arranged in the progression  $\{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \cup \{\frac{n+4}{2}, \dots, n+1\}$ . The existence of labeling for 2-regular graph class is completely settled for the newly defined vertex labeling.

**Keywords:** sports tournaments, magic labeling, handicap labeling, modified handicap labeling, 2-regular graphs

## Seznam zkratek a použitých symbolů

$G = (V, E)$	Graf $G$ s množinou hran $E$ a množinou vrcholů $V$
$E(G)$	Množina hran grafu $G$
$V(G)$	Množina vrcholů grafu $G$
$v_i$	$i$ -tý vrchol grafu $G$
$N(v_i)$	Množina sousedních vrcholů vrcholu $v_i$
$\deg(v_i)$	Label vrcholu $v_i$
$\Lambda(G)$	Maximální label v grafu $G$
$\lambda(G)$	Minimální label v grafu $G$
$r$	Pravidelnost grafu $G$
$n$	Počet vrcholů grafu $G$
$C_n$	Cyklus na $n$ vrcholech
$P_n$	Cesta na $n$ vrcholech
$K_n$	Kompletní graf s $n$ vrcholy
$T_n$	Strom na $n$ vrcholech
$K_{m,n}$	Kompletní bipartitní graf s portitami o $m$ a $n$ vrcholech
$f(v_i)$	Ohodnocení vrcholu $v_i$
$w_f(v_i)$	Váha vrcholu $v_i$ při ohodnocení $f$
$1 - VMV$	Magické ohodnocení grafu/Distance Magic labelings/1-vertex magic labelings
$\mu$	Magická konstanta
$\ell$	Konstanta v případě hendikepového ohodnocení
$y$	Vynechaný label
$x$	Vynechaná váha
$k$	Konstanta odvozená při výpočtu $\ell$
$a, b$	Startovní vrcholy v konstrukci cyklu $C_6$
$A, B$	Typy možných způsobů uspořádání vrcholu v cyklu $C_6$ , pro $\ell$ liché
$C, D$	Typy možných způsobů uspořádání vrcholu v cyklu $C_6$ , pro $\ell$ sudé
$L$	Liché číslo
$S$	Sudé číslo
$v_{ij}$	$i$ -tý vrchol v $j$ -tém cyklu
$\lambda$	zobrazení v případě upraveného hendikepového ohodnocení.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
1.1	Neúplné turnaje . . . . .	4
1.2	FIT a EIT neúplné turnaje . . . . .	5
1.3	Hendikepové turnaje . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Základní pojmy a definice</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Přehled výsledků 1-VMV ohodnocení</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Hendikepové ohodnocení.</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Zobecnění hendikepového ohodnocení</b>	<b>23</b>
5.1	Určení mezí pro $k$ . . . . .	24
5.2	Určení mezí pro $x$ a $y$ . . . . .	24
5.3	Vynechání prvku v množině vah a množině labelů . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Upravené hendikepové ohodnocení</b>	<b>30</b>
6.1	2-pravidelné grafy . . . . .	32
6.2	Existence upraveného hendikepového ohodnocení pro 2-pravidelné grafy . .	39
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>50</b>
<b>8</b>	<b>Seznam literatury</b>	<b>51</b>



## Seznam obrázků

1	Příklad úplného turnaje pro 8 týmů. . . . .	5
2	Příklad $FIT_{(12,3)}$ trunaje, kde $\ell = 26$ . Modře je znázorněna obtížnost turnaje (váha) pro jednotlivé týmy (vrcholy). . . . .	6
3	Příklad $EIT_{(9,6)}$ trunaje, kde $\mu = 30$ . Modře je znázorněna obtížnost turnaje (váha) pro jednotlivé týmy (vrcholy). . . . .	7
4	Příklad $HAND_{(8,3)}$ turnaje, kde $\ell = 9$ . Modře je znázorněna obtížnost turnaje (váha) pro jednotlivé týmy (vrcholy). . . . .	8
5	Příklad grafu $G$ s množinou vrcholů $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ a množinou hran $\{\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$ . . . . .	9
6	Příklad zeleného podgrafu $H$ grafu $G$ s množinou vrcholů $V(H) = \{v_3, v_5, v_6\}$ a množinou hran $E(H) = \{\{v_3, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$ . . . . .	10
7	Vrchol $v_1$ a jeho soused vrchol $v_2$ . . . . .	10
8	Příklad grafu $G$ s maximálním stupěň $\Delta(G) = 3$ a s minimálním stupněm $\delta(G) = 0$ . . . . .	11
9	Příklad 3-pravidelného grafu na 8 vrcholech. . . . .	12
10	Příklad triviálního grafu $G$ s množinou vrcholů $V(G) = \{v_1\}$ . . . . .	12
11	Příklad cyklu $C_n$ délky $n$ . . . . .	13
12	Příklad $(v_1, v_3)$ -sledu (značen zelenou barvou) v grafu $G$ s posloupností vrcholů a hran $(v_1, e_5, v_6, e_4, v_5, e_2, v_3)$ . . . . .	13
13	Příklad cesty $P_n$ délky $n$ . . . . .	14
14	Příklad kompletního grafu $K_8$ . . . . .	14
15	Příklad grafu $\bar{G}$ , který je doplňkem grafu $G$ do kompletního grafu $K_8$ z obrázku 14. . . . .	15
16	Příklad souvislého grafu $G_1$ a nesouvislého grafu $G_2$ . . . . .	15
17	Příklad stromu $T_n$ , na $n$ vrcholech. . . . .	16
18	Příklad kompletního bipartitního grafu $K_{2,3}$ , a $K_{4,1}$ . . . . .	16
19	Příklad vrcholového ohodnocení (graf $G_1$ ), hranového ohodnocení (graf $G_2$ ) a totálního ohodnocení (graf $G_3$ ). . . . .	17
20	Příklad znázornění jednotlivých vah v grafu $G$ , při ohodnocení $f$ . . . . .	17
21	Příklad surjektivního zobrazení ( $f_1$ ), injektivního zobrazení ( $f_2$ ) a bijektivního zobrazení ( $f_3$ ). . . . .	18
22	Příklad 2-pravidelného grafu $G$ na $n = 4$ vrcholech s 1-VMV ohodnocením, kde $\mu = 5$ . . . . .	19
23	Příklad 14-pravidelného grafu $G$ na $n = 19$ vrcholech s 1-VMV ohodnocením, kde $\mu = 140$ . . . . .	20
24	Příklad 5-pravidelného grafu $G$ na 12 vrcholech s hendikepovým ohodnocením, kde $\ell = 26$ . . . . .	22
25	Graf $G_1$ s upraveným hendikepovým ohodnocením. . . . .	33
26	Vrchol a se sousedním vrcholem b. . . . .	33
27	Přidání souseda vrcholu $a$ a souseda vrcholu $b$ . . . . .	34
28	Přidání souseda vrcholu $l+a+b$ a souseda vrcholu $l-a+b$ . . . . .	34
29	Komponenta $C_6$ . . . . .	34

30	Zobrazení parit labelů a vah vrcholu grafu $G$ , kdy $\ell$ je liché. . . . .	36
31	Zobrazení parit labelů a vah vrcholu grafu $G$ , kdy $\ell$ je sudé. . . . .	38
32	Pořadí vrcholů v jednotlivých komponentách $C_6$ grafu $G$ . . . . .	40
33	Rozložení intervalu $\langle 1, \frac{n}{3} \rangle$ na jednotlivé pod intervaly podle příslušných předpisů výpočtu labelů . . . . .	41
34	Rozložení intervalu $(\frac{n}{3}, n+1)$ na jednotlivé pod intervaly, podle příslušných předpisů výpočtu labelů . . . . .	41
35	Varianta uspořádání labelů pro $j = 1$ . . . . .	42
36	Varianta uspořádání labelů pro $j$ liché, $j > 1$ a $1 < j < \frac{n}{12}$ . . . . .	43
37	Varianta uspořádání labelů pro $j$ liché, $j > 1$ a $j > \frac{n}{12}$ . . . . .	44
38	Varianta uspořádání labelů pro $j$ sudé a $j \leq \frac{n}{12}$ . . . . .	45
39	Varianta uspořádání labelů pro $j$ sudé, $j > \frac{n}{12}$ a $j < \frac{n}{6}$ . . . . .	46
40	Varianta uspořádání labelů pro $j$ sudé a $j = \frac{n}{6}$ . . . . .	47
41	Znázornění hodnot labelů, které budou nabývat jednotlivé vrcholy . . . . .	49

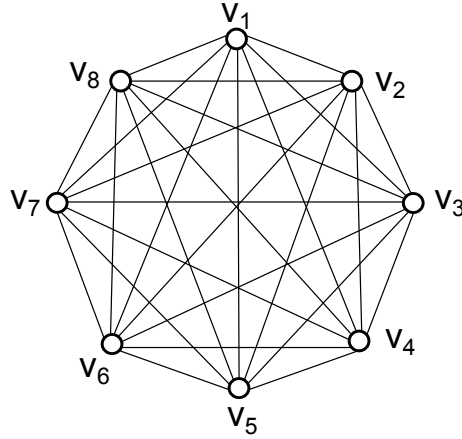
# 1 Úvod

Představme si situaci, kdy máme za úkol naplánovat sportovní turnaj pro  $n$  týmů (účastníků, soutěžících, ...). Způsob, jakým tento turnaj naplánujeme, závisí na množství požadavků, které jsou na vytvoření daného turnaje kladeny. Pokud bude příliš mnoho týmů a bude kladen požadavek na odehrání celého turnaje v předem daném termínu, můžeme naplánovat turnaj systémem skupina + vyřazovací kola. Týmy nejprve rozdělíme do jednotlivých skupin, z kterých postoupí určitý počet týmů, které následně změří své síly v play-off fázi turnaje (fotbalová liga mistrů, mistrovství světa ve fotbale, ...). Pokud bude stanovený termín pro odehrání turnaje příliš krátký, můžeme v turnaji vynechat skupinovou část a naplánovat pouze část vyřazovací (tenisový Wimbledon, ...). Turnaj naplánovaný tímto systémem ovšem není pro všechny účastníky spravedlivý. Pokud budeme losovat jednotlivé týmy do skupin a následně (nebo pouze) do pavouka play-off části náhodně, budou mít jistě větší šanci postoupit do dalších kol turnaje silné týmy, naproti tomu slabé týmy budou mít šanci menší. Otázkou tedy je, jak naplánovat turnaj tak, aby byl co nejspravedlivější pro všechny.

Nejspravedlivějším systémem turnaje se zdá být turnaj úplný. Úplný turnaj je takový turnaj, kde týmy odehrají stejný počet zápasů a hrají všichni proti všem, tedy každý tým změří své síly se všemi zbývajících soupeři v turnaji. Problém této formy turnaje může být časová náročnost, kdy s přibývajícím počtem soupeřů značně narůstá počet zápasů, který se musí odehrát. Celkem se v takovém turnaji odehraje  $\frac{n(n-1)}{2}$  zápasů, kde každý tým hraje  $n - 1$  her. Systém úplného turnaje se zpravidla aplikuje, pokud je  $n \leq 24$  (světové fotbalové ligy, ...), pro větší počet týmů je tento turnaj příliš časově náročný. Abychom zkrátili čas potřebný k odehrání turnaje, můžeme některé zápasy, které by se měly v případě úplného turnaje odehrát, vynechat. Týmy tedy neodehrají všech  $n - 1$  her, ale pouze  $m$ , kde  $m$  je nějaké celé kladné číslo větší než jedna a samozřejmě musí být menší než  $n - 1$ . Turnaj, kde každý tým odehraje pouze  $m$  utkání, budeme nazývat neúplný turnaj.

## 1.1 Neúplné turnaje

Aby byl neúplný turnaj spravedlivý pro všechny účastníky, musíme zajistit že nenastane případ, kdy silný tým bude hrát  $m$  zápasů proti slabým soupeřům a slabý tým  $m$  zápasů proti silným soupeřům. V takovém turnaji by byl slabý tým jistě znevýhodněn. K sestavení neúplného turnaje můžeme využít znalosti z teorie grafů. Grafy jsou vhodným prostředkem, jak zobrazit turnaj. Jednotlivé týmy reprezentují vrcholy grafu a jednotlivé zápasy budou reprezentovány hranou mezi příslušnými vrcholy. Na obrázku 1 je znázorněn graf zastupující úplný turnaj osmi týmů, kde tým jedna je reprezentován vrcholem  $v_1$ , tým dva vrcholem  $v_2$  a tak dále. Zápas týmu jedna z týmem dva je znázorněn hranou  $v_1v_2$ , obdobně pro ostatní zápasy.



Obrázek 1: Příklad úplného turnaje pro 8 týmů.

Abychom se mohli zabývat spravedlivostí neúplného turnaje, musíme říct, co znamená pojem silný a slabý tým. Týmům přiřadíme jejich sílu (například na základě loňského umístění v turnaji, nebo celkové ceny hráčů hrajících v daném týmu) tak, že každému týmu přiřadíme číslo z posloupnosti  $1, 2, \dots, n$ , nejsilnějšímu týmu přiřadíme číslo  $n$  a bude reprezentován vrcholem  $v_n$ , druhému nejsilnějšímu týmu přiřadíme číslo  $n - 1$  a bude reprezentován vrcholem  $v_{n-1}$ , nejslabší tým tedy dostane přiřazeno číslo 1 a bude reprezentován vrcholem  $v_1$ . Obecně můžeme psát, že  $i$ -tý tým bude odpovídat vrcholu  $v_i$  a bude disponovat silou  $s_n(i) = n + 1 - i$ . Celková síla všech jeho soupeřů v úplném turnaji je dána vztahem  $S_{n,n-1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + i$ . Je zřejmé, že jednotlivé síly týmů budou tvořit aritmetickou posloupnost s diferencí 1. Index  $n$  udává počet týmů v turnaji a index  $n - 1$  počet zápasů, který každý tým v úplném turnaji odehraje. Pomocí teorie grafu můžeme navrhnout tři typy neúplných turnajů: spravedlivý neúplný turnaj, vyrovnaný neúplný turnaj a hendikepový turnaj. Podívejme se nyní blíže na jednotlivé typy.

## 1.2 FIT a EIT neúplné turnaje

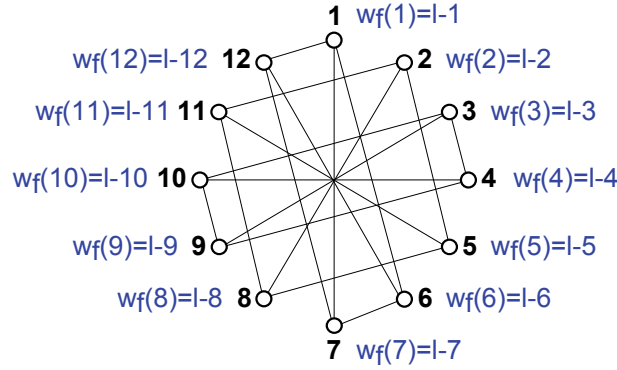
Následující terminologie FIT a EIT turnajů je převzata z článku [2] od autorů Frončeka, Kováře a Kovářové.

**Definice 1.1.** [2] *Spravedlivý neúplný turnaj značíme  $FIT_{(n,m)}$ , z anglického fair incomplete tournament, je turnaj  $n$  týmů, kde každý tým odehraje právě  $m$  zápasů a platí, že součet sil všech soupeřů, se kterými se hráč  $i$  setká, je:*

$$S_{n,m}(i) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + i - t,$$

kde  $t \in \mathbb{N}$  a udává součet síly hráčů se kterými hráč  $i$  nebude hrát.

Danou podmínku můžeme ekvivalentně přeformulovat do podoby  $w(v_i) = \ell - f(v_i)$ , kde  $w(v_i)$  je váha vrcholu  $v_i$  a  $f(v_i)$  je ohodnocení vrcholů  $v_i$ , tyto pojmy jsou definovány v kapitole 2.



Obrázek 2: Příklad  $FIT_{(12,3)}$  turnaje, kde  $\ell = 26$ . Modře je znázorněna obtížnost turnaje (váha) pro jednotlivé týmy (vrcholy).

Tento turnaj je spravedlivý v tom smyslu, že všechny týmy odehrají stejný počet zápasů a obtížnost turnaje pro každý tým je shodná s obtížností v úplném turnaji, což je žádoucí, (pojmeme obtížnost turnaje pro daný tým máme na mysli součet sil oponentů, se kterými odehraje zápas), ale je nevyrovnaný. Pokud tímto způsobem naplánujeme turnaj, bude silný tým hrát s týmy slabými a slabý tým s týmy silnými a to už žádoucí není. Řešením může být pokusit se naplánuvat turnaj tak, aby obtížnost turnaje byla pro všechny týmy stejná. Takový turnaj budeme nazývat vyrovnaný neúplný turnaj.

**Definice 1.2.** [2] *Vyrovnaný neúplný turnaj značíme  $EIT_{(n,r)}$ , z anglického equalized incomplete tournament, je turnaj  $n$  týmů, kde každý tým odehraje právě  $r$  zápasů a platí, že součet sil všech soupeřů, se kterými se hráč  $i$  setká je:*

$$S_{n,r}(i) = \mu, \text{ tedy, } w(v_i) = \mu,$$

kde  $\mu \in \mathbb{N}$ .

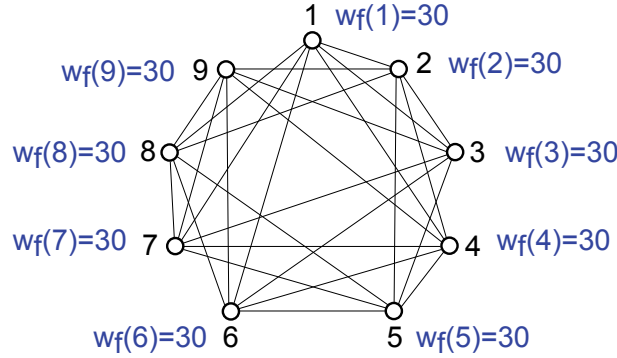
V tomto turnaji je tedy obtížnost pro všechny týmy stejná, navíc platí i zde, že všichni odehrají stejný počet utkání.

Můžeme si povšimnout, že zatím co vynecháním zápasů z úplného turnaje pro  $n$  týmů získáme spravedlivý neúplný turnaj  $FIT_{(n,m)}$ , tak vynecháním  $m$  zápasů, které se měly v  $FIT_{(n,m)}$  turnaji hrát, získáme turnaj  $EIT_{(n,n-1-m)}$ . V řeči teorie grafů tato věta znamená, že pokud graf úplného turnaje označíme  $G$ , graf  $FIT_{(n,m)}$  turnaje  $G_1$  a graf  $EIT_{(n,n-1-m)}$  turnaje  $G_2$ , tak graf  $G_1$  je doplněk grafu  $G_2$  do grafu  $G$  a naopak platí, že graf  $G_2$  je doplněk grafu  $G_1$  do grafu  $G$  (vysvětlení pojmu doplněk grafu je v kapitole 2).

V článku 5 jsou také zmíněny základní výsledky tykající se  $FIT_{(n,m)}$  a  $EIT_{(n,r)}$  turnajů.

**Věta 1.1.** *Nechť  $EIT_{(n,r)}$  je vyrovnaný neúplný turnaj. Pak  $r$  je sudé.*

Tato věta říká, že pokud naplánujeme neúplný vyrovnaný turnaj, pak počet zápasů, které každý tým odehraje, je sudý.



Obrázek 3: Příklad  $EIT_{(9,6)}$  turnaje, kde  $\mu = 30$ . Modře je znázorněna obtížnost turnaje (váha) pro jednotlivé týmy (vrcholy).

**Věta 1.2.** *Nechť  $EIT_{(n,r)}$  je vyrovnaný neúplný turnaj, kde  $n$  je sudé a  $r \equiv 2 \pmod{4}$ . Pak  $n \equiv 0 \pmod{4}$ .*

Neboli, pokud máme vyrovnaný neúplný turnaj se sudým počtem týmů a  $r$  zápasů, kde  $r$  splňuje podmínku  $r \equiv 2 \pmod{4}$ , pak počet týmů v tomto turnaji je bezesbýtku dělitelný čtyřmi.

Nyní uvedme tři věty, které nám popisují, za jakých podmínek jsme schopni daný turnaj naplánovat, tzv. existenční věty.

**Věta 1.3.** *Pro  $n$  sudé existuje  $EIT_{(n,r)}$  pouze tehdy a jen tehdy, když  $2 \leq r \leq n - 2$ ,  $r \equiv 0 \pmod{4}$  a buď  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , nebo  $n \equiv r + 2 \equiv 2 \pmod{4}$ .*

$EIT_{(n,r)}$  jde naplánovat například pro 12 týmů, kde každý tým odehraje 8 zápasů. Tento turnaj naopak naplánovat nejde, pokud budeme chtít, aby každý tým v turnaji odehrál 6 zápasů a počet týmů bude 10.

**Věta 1.4.**  *$FIT_{(n,n-1-r)}$  existuje tehdy a jen tehdy, pokud existuje  $EIT_{(n,r)}$ .*

Existenci grafů  $EIT_{(n,r)}$  jsme schopni v teorii grafů prošetřit pomocí magického ohodnocení 3.1, následně turnaj  $FIT_{(n,n-1-r)}$ , jak již bylo zmíněno můžeme, hledat jako doplněk turnajů  $EIT_{(n,r)}$  do kompletního turnaje.

Nyní se podíváme na třetí typ neúplných turnajů, na hendikepové turnaje.

### 1.3 Hendikepové turnaje

V jistém smyslu, se mohou zdát jako nespravedlivé i úplné turnaje. Pokud uvažujeme výše popsany systém udělování síly jednotlivým týmům i zde, je zřejmé, že v úplném turnaji bude nejsilnější tým hrát pouze s týmy slabšími a naopak nejslabší tým bude hrát s týmy silnějšími. Abychom tento nedostatek zmírnili, můžeme se pokusit naplánovat turnaj tak,

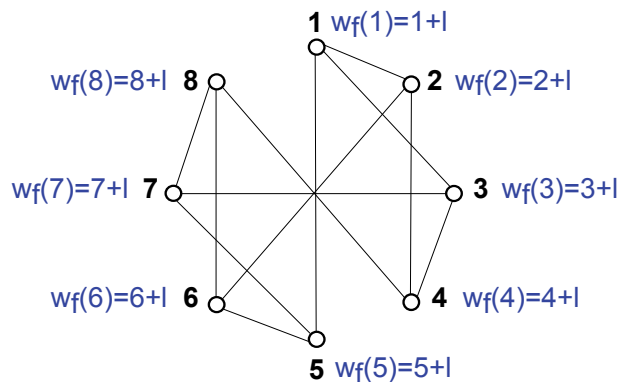
aby slabé týmy nehrály s týmy silnými a silné týmy s týmy slabými. Takto naplánovaný turnaj budeme nazývat hendikepovým turnajem. Pojem hendikepový turnaj poprvé zavedl Fronček v článku [7].

**Definice 1.3.** [7] *Hendikepový neúplný turnaj značíme  $HAND_{(n,r)}$  z anglického handicap tournament, je turnaj  $n$  týmů, kde každý tým odehraje právě  $r$  zápasů a platí, že součet sil všech soupeřů, se kterými se hráč  $i$  setká, je:*

$$S_{n,r}(i) = \ell - i,$$

kde  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Podmínku  $S_{n,r}(i) = \ell - i$  můžeme ekvivalentně přeformulovat do podoby  $w(v_i) = \ell + f(v_i)$ .



Obrázek 4: Příklad  $HAND_{(8,3)}$  turnaje, kde  $\ell = 9$ . Modře je znázorněna obtížnost turnaje (váha) pro jednotlivé týmy (vrcholy).

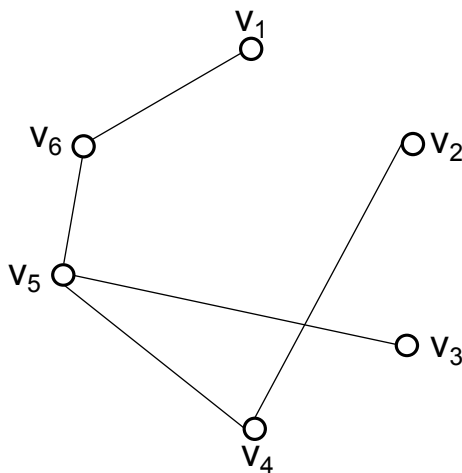
V hendikepovém turnaji hrají silné týmy proti silným týmům a slabé týmy proti slabým. Tento turnaj tím může být i divácky atraktivnější, zápas dvou vyrovnaných týmů bude jistě napínavější než zápas, kde silný tým jednoznačně porazí tým slabý. Hendikepové turnaje jsme schopni naplánovat pomocí hendikepového ohodnocení z definice 4.1. Obsáhleji se hendikepovému ohodnocení věnujeme v kapitole 4, kde jsou popsány základní vlastnosti a výsledky tohoto ohodnocení.

## 2 Základní pojmy a definice

V této kapitole se seznámíme se základními pojmy z oblasti teorie grafů potřebnými k úplnému pochopení výsledků této diplomové práce. Jednotlivé definice, pojmy a věty jsou převzaty z textu [10],[11] (jednotlivé značení se může lišit).

Jako první a jedna z nejdůležitějších definic je definice jednoduchého neorientovaného grafů. S jinými typy grafu se v této práci setkávat nebudeme, v dalším textu slovem graf budeme tedy myslet jednoduchý neorientovaný graf.

**Definice 2.1.** *Jednoduchý neorientovaný (obyčejný) graf  $G$  je uspořádaná dvojice  $(V, E)$ , kde  $V$  je množina vrcholů (množinu vrcholů grafu  $G$  označujeme  $V(G)$ ) a  $E$  je množina hran - množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny  $V$  (množinu hran grafu  $G$  označujeme  $E(G)$ ).*



Obrázek 5: Příklad grafu  $G$  s množinou vrcholů  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  a množinou hran  $\{\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$ .

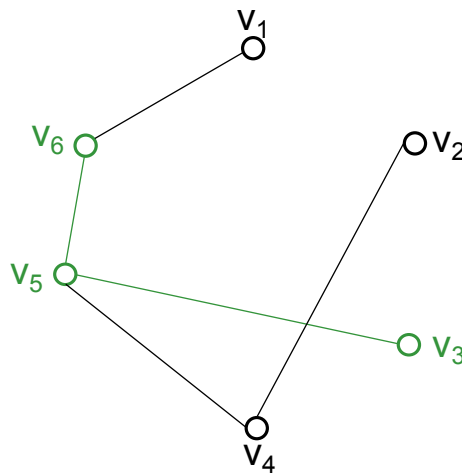
Název grafu se obvykle označuje velkým tiskacím písmenem, v této práci nejčastěji písmenem  $G$ . Prvky množiny vrcholů grafu  $G$ , tedy množiny  $V(G)$ , budeme označovat malým psacím písmenem například  $x, y, z$ , nebo také častěji  $v_i, v_j, v_k$ . Prvky množiny hran grafu  $G$ , množiny  $E(G)$  potom jsou  $\{x, y\}$ , nebo zkráceně  $xy$  a v druhém případě  $\{v_i, v_j\}$ , zkráceně  $v_i v_j$ .

Obyčejný graf je tedy takový graf, který nemá žádnou hranu orientovanou (není udán směr hrany). V tomto grafu, také nejsou žádné smyčky (v množině hran  $E$  není dvojice  $\{v_i, v_i\}$ ) a dvojité hrany (v množině hran  $E$  se nevyskytuje žádná dvojice  $\{v_i, v_j\}$  dvakrát). Graf můžeme zadávat pomocí diagramu (příklad diagramu je na obrázku 5), nebo také výčtem vrcholů a výčtem hran. Pro graf na obrázku 5 by vypadal daný výčet



následovně:  $G = (V, E)$ , kde  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  a  $E(G) = \{\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$ .

**Definice 2.2.** Podgraf  $H$  grafu  $G$ , je libovolný graf na množině vrcholů  $V(H) \subseteq V(G)$  a množině hran  $E(H) \subseteq E(G)$ .

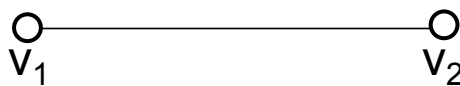


Obrázek 6: Příklad zeleného podgrafu  $H$  grafu  $G$  s množinou vrcholů  $V(H) = \{v_3, v_5, v_6\}$  a množinou hran  $E(H) = \{\{v_3, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$ .

Podgraf tedy vytvoříme z libovolného grafu tím, že z množiny vrcholů odebereme některé vrcholy, nebo z množiny hran odebereme některé hrany. Pokud odebereme vrchol, musíme také odstranit všechny hrany, se kterými byl daný vrchol incidentní (hrana grafu vždy musí mít na konci vrchol). Platí také, že každý graf je sám sobě podgrafem.

Nyní se podívejme, co znamená, když se řekne, že dva vrcholy jsou sousední.

**Definice 2.3.** Dva vrcholy z množiny vrcholů  $v_1, v_2 \in V(G)$  jsou sousední (závislé) v grafu  $G$ , pokud v tomto grafu existuje hrana  $\{v_1, v_2\}$ , tedy  $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ .



Obrázek 7: Vrchol  $v_1$  a jeho soused vrchol  $v_2$ .

Na obrázku 7 je příklad dvou sousedních vrcholů, vrcholu  $v_1$ , který má za souseda vrchol  $v_2$ . Pokud bychom se podívali na graf z obrázku 5, tak zde jsou například sousední tyto vrcholy:  $v_1v_6, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5$ , naopak vrchol  $v_1$  a vrchol  $v_2$  sousední nejsou, protože

hrana  $\{v_1, v_2\}$  v grafu  $G$  není ( $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$ ).

**Definice 2.4.** Množina sousedních vrcholů vrcholu  $v_i$  (značíme  $N(v_i)$ ) obsahuje všechny vrcholy  $v_j$ , pro které platí  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ .

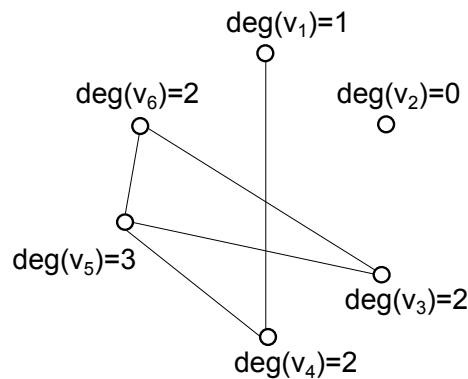
Vrcholy  $v_j$  v grafu  $G$ , které jsou spojeny hranou s vrcholem  $v_i \in V(G)$  patří do množiny sousedních vrcholů vrcholu  $v_i$ . Jako příklad si můžeme opět vzít graf  $G$  z obrázku 5, kde množina  $N(v_5) = \{v_3, v_4, v_6\}$  (množina sousedních vrcholů vrcholu  $v_5$ ).

**Definice 2.5.** Stupeň vrcholu  $v_i \in V(G)$  (značíme  $\deg(v_i)$ ) je roven počtu hran, se kterými je daný vrchol incidentní.

Velice snadno si můžeme rozmyslet, že vrchol  $v_i \in V(G)$  nikdy nemůže mít stupeň větší, než je celkový počet vrcholů v grafu, bez onoho vrcholu  $v_i$  (v obyčejném grafu nemůže být vrchol sám se sebou sousední). Z toho plyne důsledek:

**Důsledek 2.1.** Maximální možný stupeň vrcholu  $v_i$  v grafu  $G$  je  $\deg(v_i) = |V(G)| - 1$ .

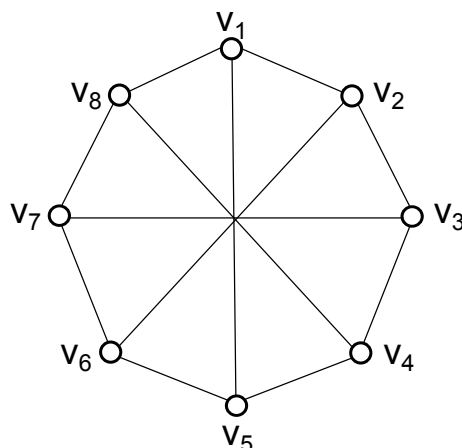
Jako názorný příklad si nyní můžeme vzít vrchol  $v_5$  z grafu  $G$  na obrázku 5, který má label vrcholu  $\deg(v_5) = 3$ . Největší stupeň v grafu  $G$  značíme  $\Delta(G)$ , nejmenší stupeň  $\delta(G)$  a pokud je v grafu zastoupen vrchol pro nějž platí  $\deg(v_i) = 0$ , nazýváme tento vrchol izolovaným vrcholem.



Obrázek 8: Příklad grafu  $G$  s maximálním stupněm  $\Delta(G) = 3$  a s minimálním stupněm  $\delta(G) = 0$ .

Stupeň vrcholu je velice úzce spjat s pravidelností grafu. Například, pokud mají všechny vrcholy v grafu  $G$  stupeň dva, nazýváme graf  $G$  2-pravidelný (příklad pravidelného grafu je na obrázku 9). Uvedme nyní definici  $r$ -pravidelného grafu:

**Definice 2.6.** Pokud v grafu  $G$ ,  $\forall v_i \in V(G)$  platí:  $\deg(v_i) = r$ , pak nazveme graf  $G$   $r$ -pravidelným ( $r$ -regulárním).



Obrázek 9: Příklad 3-pravidelného grafu na 8 vrcholech.

Řada grafů má své vlastní označení (jméno), nyní uveďme některé z nich. Jako první definujeme triviální graf.

**Definice 2.7.** Graf  $G = (V, E)$  nazveme grafem triviálním, pokud množina vrcholů  $V(G)$  obsahuje pouze jeden prvek a množina hran  $E(G)$  je prázdná množina.



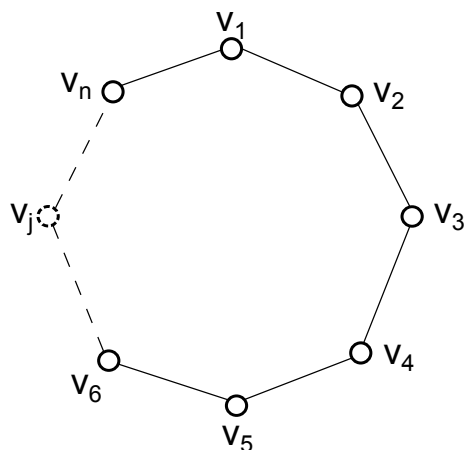
Obrázek 10: Příklad triviálního grafu  $G$  s množinou vrcholů  $V(G) = \{v_1\}$ .

Triviální graf můžeme zapisovat ve tvaru  $G = (V, \emptyset)$ , jedná se pouze o samostatný vrchol. Příklad triviálního grafu je na obrázku 10.

Dalším typem grafu, který má své vlastní označení, je cyklus, nebo někdy také kružnice (v této práci budeme využívat název Cyklus).

**Definice 2.8.** Graf s množinou vrcholů  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , kde  $n \geq 3$  a množinou hran  $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ , se nazývá cyklus a značíme jej  $C_n$ .

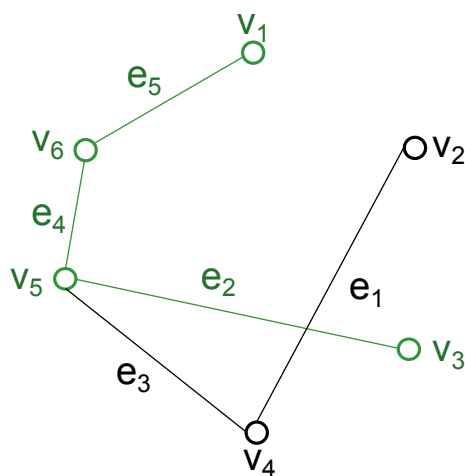
Cyklus (příklad cyklu je na obrázku 11) označujeme velkým tiskacím písmenem  $C$  s indexem  $n$ , kde  $n$  značí počet vrcholů v cyklu. Je zřejmé, že počet vrcholů v cyklu musí být minimálně tři. Pokud by byl vrchol pouze jeden, jednalo by se o triviální graf (obrázek 10).



Obrázek 11: Příklad cyklu  $C_n$  délky  $n$ .

Abychom mohli uvést definici grafu třídy cesta, musíme nejprve uvést co je to sled v grafu.

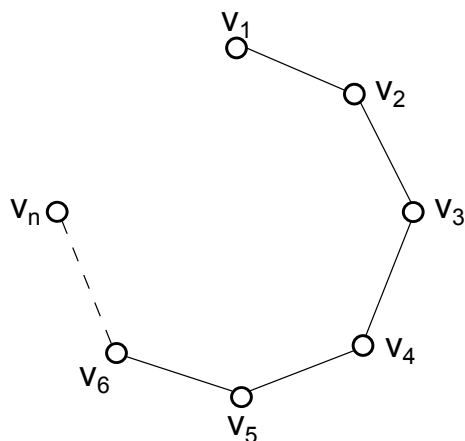
**Definice 2.9.** Sled  $(v_0, v_n)$  v grafu  $G$  je taková posloupnost vrcholů a hran  $(v_0, e_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_n)$ , že hrana  $e_i$  má počáteční vrchol  $v_{i-1}$  a koncový vrchol  $v_i$ .



Obrázek 12: Příklad  $(v_1, v_3)$ -sledu (značen zelenou barvou) v grafu  $G$  s posloupností vrcholů a hran  $(v_1, e_5, v_6, e_4, v_5, e_2, v_3)$ .

Nyní již máme vše potřebné k napsání definice grafu s názvem cesta.

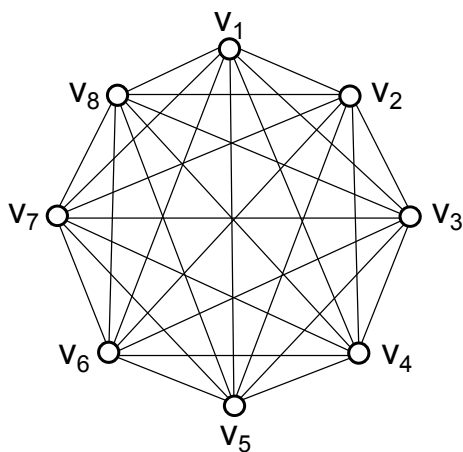
**Definice 2.10.** Cesta  $P_n$  v grafu  $G$  je sled  $(v_i, v_j)$ , ve kterém se neopakují vrcholy. Cestu s počátečním vrcholem  $v_i$  a koncovým vrcholem  $v_j$  budeme nazývat  $(v_i, v_j)$ -cesta.



Obrázek 13: Příklad cesty  $P_n$  délky  $n$ .

Počet hran, které cesta obsahuje, udávají její délku. Má-li tedy cesta  $n - 1$  hran, řekneme, že tato cesta je délky  $n - 1$ . Maximální možný stupeň vrcholu v cestě je  $\Delta(V) = 2$ . Cesta je tedy sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol. Je snadné si rozmyslet, že se tedy nemůže opakovat ani žádná hrana.

**Definice 2.11.** Graf s označením  $K_n$  nazveme *kompletním grafem*, pokud v tomto grafu jsou každé dva vrcholy sousední.



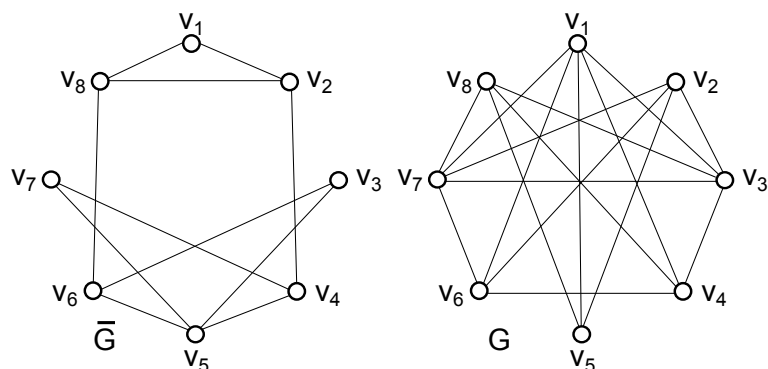
Obrázek 14: Příklad kompletního grafu  $K_8$ .

I zde, jako v případě grafu třídy cyklus a cesta, značí index  $n$  počet vrcholů v grafu. Ekvivalentně také můžeme psát, graf je *kompletní*, pokud obsahuje všech  $\binom{n}{2}$  hran. Triviální je si rozmyslet, že každý kompletní graf musí být zároveň grafem pravidelným, kde stupeň

každého vrcholu je  $\deg(v_i) = |V(G)| - 1$ , tedy největší možný.

S pojmem kompletní graf souvisí pojem doplněk grafu.

**Definice 2.12.** Řekneme, že graf  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  je doplněk grafu  $G = (V, E)$ , pokud platí  $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$ , kde symbolem  $\binom{V}{2}$ , rozumíme systém všech dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ .

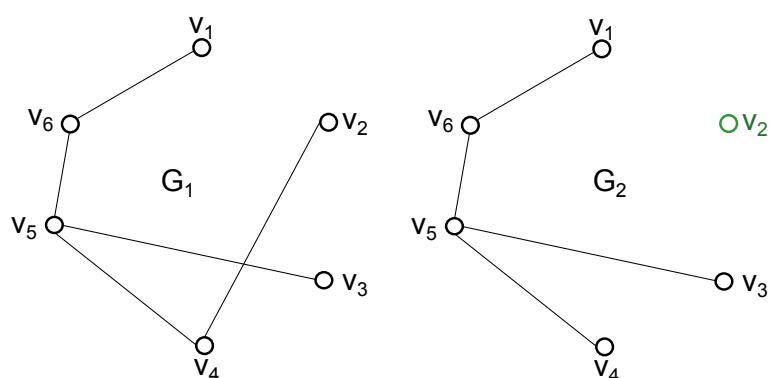


Obrázek 15: Příklad grafu  $\bar{G}$ , který je doplňkem grafu  $G$  do kompletního grafu  $K_8$  z obrázku 14.

Doplněk grafu tvoří hrany, které původnímu grafu chyběly do grafu kompletního.

Nyní se podíváme na graf s označením strom, před samotnou definicí musíme ještě říct, co je to takzvaný souvislý graf.

**Definice 2.13.** Graf  $G$  je souvislý, pokud pro každou dvojici vrcholů  $v_i, v_j \in V(G)$  existuje  $(v_i, v_j)$ -sled, v opačném případě řekneme, že je nesouvislý.

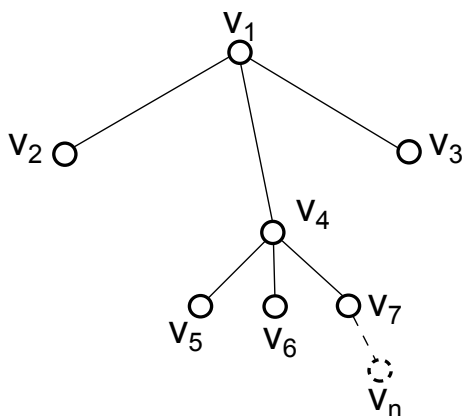


Obrázek 16: Příklad souvislého grafu  $G_1$  a nesouvislého grafu  $G_2$ .

Souvislý graf je tedy takový graf, ve kterém existuje sled pro každou dvojici vrcholů. Nyní již můžeme přikročit k samotné definici stromu.

Řekneme-li, že graf je acyklický, znamená to, že žádný jeho podgraf není cyklus.

**Definice 2.14.** Graf  $T_n$ , kde  $n$  je počet vrcholů v grafu, nazveme stromem, pokud je souvislý a acyklický.

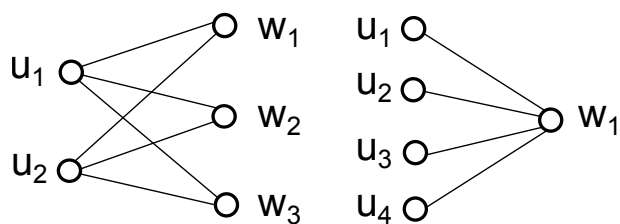


Obrázek 17: Příklad stromu  $T_n$ , na  $n$  vrcholech.

Snadno si můžeme rozmyslet, že pokud je nějaký graf strom, tak v tom grafu může být  $\Delta(G)$  maximálně  $n - 1$ . Vrcholům v grafu  $T_n$ , pro které platí  $\deg(v_i) = 1$ , říkáme listy.

Jako poslední speciální graf, který nese své jméno, uvedeme kompletní bipartitní graf.

**Definice 2.15.** Graf  $K_{m,n}$  nazveme kompletní bipartitní s partitami  $U, W$ , kde  $m = |U|$  a  $n = |W|$ , pokud množina vrcholů  $V(G)$  je sjednocení dvou neprázdných disjunktních množin  $U, W$  a množina hran je  $E = \{uw : \forall u \in U \wedge \forall w \in W\}$ .

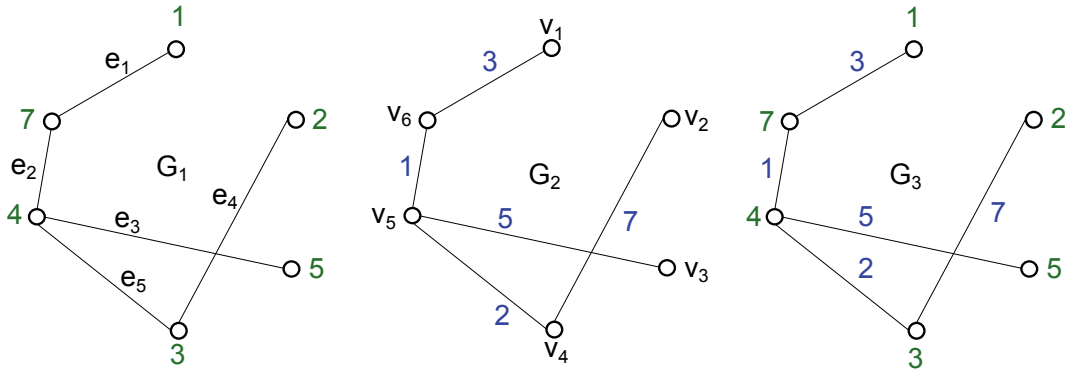


Obrázek 18: Příklad kompletního bipartitního grafu  $K_{2,3}$ , a  $K_{4,1}$ .

**Definice 2.16.** Ohodnocení grafu  $G$  je funkce  $f$ , která přiřadí vrcholům, hranám, nebo vrcholům i hranám v grafu  $G$  čísla, nejčastěji z množiny přirozených čísel.

Rozlišujeme základní tři typy ohodnocení grafu:

1. Hranové – ohodnocení  $f : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ , kdy jsou hodnoty přiřazené pouze hranám.
2. Vrcholové – ohodnocení  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ , kdy jsou hodnoty přiřazené pouze vrcholům.
3. Totální – ohodnocení  $f : E(G) \cup V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ , kdy jsou hodnoty přiřazené vrcholům i hranám.



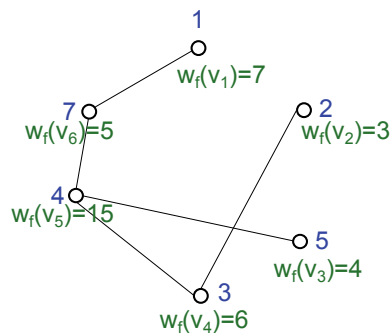
Obrázek 19: Příklad vrcholového ohodnocení (graf  $G_1$ ), hranového ohodnocení (graf  $G_2$ ) a totálního ohodnocení (graf  $G_3$ ).

Pokud máme graf, ve kterém je vrcholové ohodnocení  $f$ , můžeme pro takový graf zavést pojem váha vrcholu.

**Definice 2.17.** Váha vrcholu  $v_i$  grafu  $G$  při vrcholovém ohodnocení  $f$  se rovná

$$w_f(v_i) = \sum_{v_j \in N(v_i)} f(v_j)$$

a značí se  $w_f(v_i)$ .



Obrázek 20: Příklad znázornění jednotlivých vah v grafu  $G$ , při ohodnocení  $f$ .



Na závěr této kapitoly uvedeme definici injektivního, surjektivního a bijektivního zobrazení. Tato zobrazení v dalším textu budeme využívat.

**Definice 2.18.** *Surjektivní zobrazení, nebo také zobrazení na, je zobrazení, kde každý prvek z množiny obrazů je přiřazen alespoň jednomu prvku z množiny vzorů.*

V případě surjektivního zobrazení má každý prvek z množiny obrazů přiřazený alespoň jeden vzor. Nyní si řekněme co je zobrazení injektivní.

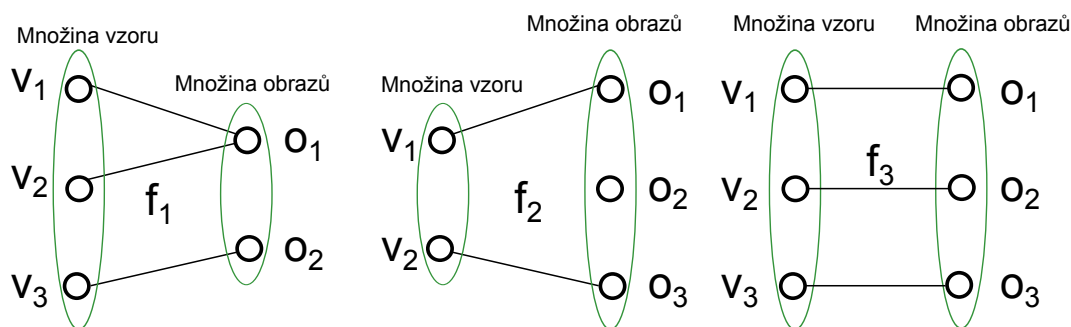
**Definice 2.19.** *Injektivní zobrazení, nebo také zobrazení prosté, je zobrazení, které přiřadí každému prvku z množiny vzorů jeden prvek z množiny obrazů, navíc žádné dva vzory nemají přiřazený stejný prvek z množiny obrazů.*

Na rozdíl od surjektivního zobrazení, kde musel mít každý obraz svůj vzor, tak v případě injektivního zobrazení musí mít každý vzor svůj jedinečný obraz.

Jako poslední nám zbývá uvést definici zobrazení bijektivního.

**Definice 2.20.** *Bijektivní zobrazení, nebo také vzájemně jednoznačné zobrazení, je zobrazení, které je zároveň zobrazení injektivní i zobrazení surjektivní.*

V bijektivním zobrazení má tedy každý vzor právě jeden obraz a každý obraz právě jeden vzor.



Obrázek 21: Příklad surjektivního zobrazení ( $f_1$ ), injektivního zobrazení ( $f_2$ ) a bijektivního zobrazení ( $f_3$ ).

### 3 Přehled výsledků 1-VMV ohodnocení

V této kapitole se seznámíme s některými grafovými ohodnoceními a základními výsledky. Protože problematika ohodnocení grafů je velice široká a jednotlivých tříd grafových ohodnocení je mnoho, budeme se zde převážně zabývat skupinou ohodnocení, které patří do třídy Sigma labelings, 1-VMV, nebo také 1-vortex magic labelings.

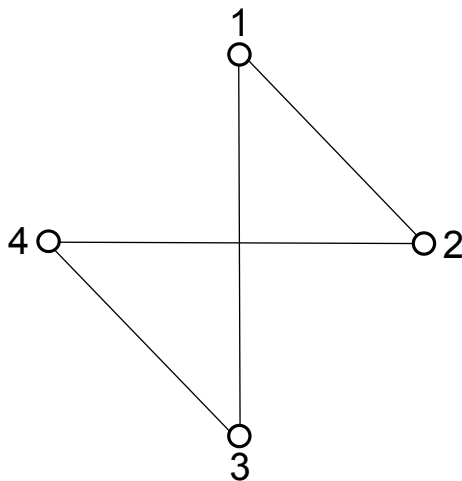
Jako první se podíváme na takzvané magické ohodnocení grafů, nebo také 1-VMV ohodnocení.

**Definice 3.1.** 1-VMV ohodnocení grafu  $G = (V, E)$  je bijektivní zobrazení  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$  takové, že pro každý vrchol  $v_i \in V(G)$  platí:

$$w_f(v_i) = \sum_{v_j \in N(v_i)} f(v_j) = \mu,$$

kde  $\mu$  je takzvaná magická konstanta.

Jedná se tedy o vrcholové ohodnocení, kde každý vrchol má stejnou váhu. Nebo-li, pokud pro každý jednotlivý vrchol  $v_i$  sečteme labely jeho sousedů, dostaneme pro všechny vrcholy stejnou hodnotu váhy. Tato hodnota se nazývá magická konstanta grafu  $G$  a značí se  $\mu$ .



Obrázek 22: Příklad 2-pravidelného grafu  $G$  na  $n = 4$  vrcholech s 1-VMV ohodnocením, kde  $\mu = 5$ .

Pro magické ohodnocení bylo nezávisle na sobě nalezeno již mnoho výsledků. Za základní výsledky můžeme považovat následující výsledky.

Pro grafy, kde  $r$  je liché 1-VMV ohodnocení neexistuje. To je důsledek vztahu z článku [1]

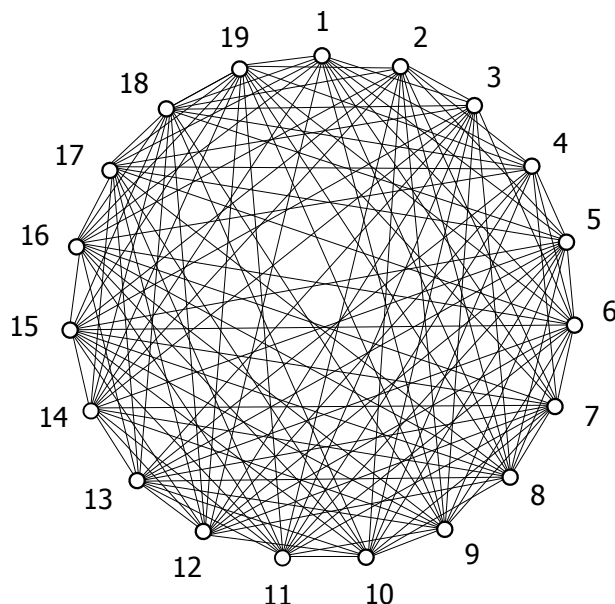
$$\sum_{v_j \in V(G)} \deg(v_i) f(v_i) = kn,$$

kde  $f$  je magické ohodnocení v grafu  $G$ ,  $\mu$  magická konstanta a  $n$  je počet vrcholů v grafu  $G$ . Z tohoto tvrzení můžeme odvodit vztah pro výpočet magické konstanty pro pravidelný graf  $\mu = \frac{r(n+1)}{2}$ .

Jsou známy také základní výsledky pro několik tříd grafů, například pro kompletní multipartitní graf  $K_{m,n}$  ( $m, n > 1$ ), který má každou partitu velikosti  $n$  může existovat magické ohodnocení pouze pokud  $n$  je sudé, nebo  $n$  a  $m$  je současně liché.

Dále cesta  $P_n$  je 1-VMV, pokud  $n = 1$ , nebo  $n = 3$ . Cyklus může být magicky ohodnocen pouze, pokud  $n = 4$ , kompletní  $K_n$  graf může obsahovat magické ohodnocení pouze v případě, kdy se jedná o graf triviální, tedy  $n = 1$ . Jako poslední zmiňme graf typu strom  $T_n$ , pro tento graf může existovat 1-VMV ohodnocení pouze tehdy a jen tehdy, když se jedná o cestu  $P_1$ , tedy  $T = P_1$ , nebo když se jedná o cestu  $P_3$ , tedy  $T = P_3$ .

Tyto výsledky jsou převzaty z článku [1].



Obrázek 23: Příklad 14-pravidelného grafu  $G$  na  $n = 19$  vrcholech s 1-VMV ohodnocením, kde  $\mu = 140$ .

Otázku existence 1-VMV ohodnocení v případě  $r$ -pravidelných grafů, je vhodné rozdělit na dva případy. Na případ, kdy se jedná o  $r$ -pravidelný graf na sudém počtu vrcholů (tedy  $n$  je sudé) a pro případ, kdy se jedná o  $r$ -pravidelný graf na lichém počtu vrcholů ( $n$  je liché).

Pro případ, kdy je  $n$  sudé, je existence ohodnocení zcela vyřešena v článku [2]. 1-VMV ohodnocení existuje v  $r$ -pravidelném grafu  $G$  na  $n$  vrcholech ( $n$  je sudé) právě tehdy, je-li  $r$  v rozmezí  $2 \leq r \leq n - 2$ ,  $r \equiv 0 \pmod{2}$  a je splněna buď podmínka  $r \equiv 0 \pmod{4}$ , nebo podmínka  $r \equiv r + 2 \equiv 0 \pmod{4}$ . Počet vrcholů  $n$  i pravidelnost  $r$  musejí tedy být dělitelné 4-mi bez zbytku.

V případě, kdy počet vrcholů je lichý, je existence 1-VMV ohodnocení vyřešena pro 2–, 4–, 6–, 8–, 10–, 12– a 14–pravidelné grafy. U všech těchto pravidelností byla stanovena hranice počtu vrcholů, kdy 1-VMV ohodnocení může existovat. V případě grafu dva pravidelného je dolní mez existence  $n \geq 4$ . Bylo zjištěno, že 1-VMV existuje pro 2-pravidelný graf pouze pokud se jedná o  $t$  ( $t$  je celé číslo) kopií cyklu  $C_4$  [1]. 1-VMV ohodnocení existuje pro 4-pravidelný graf právě tehdy a jen tehdy, když  $n \geq 17$  [3], pro 6-pravidelný graf právě tehdy a jen tehdy, když  $n = 9$ , nebo  $n \geq 13$ , pro 8-pravidelný, 10-pravidelný a 12-pravidelný graf pouze tehdy, když  $n \geq 15$  [4] a pro 14-pravidelný graf je mez existence  $n \geq 19$  [11].

Je také známo několik výsledků, kdy 1-VMV ohodnocení existovat v daném grafu nemůže (následující výsledky jsou z článku [1]). Pokud je graf  $G$  řádu  $n$  a má dva vrcholy stupně  $n - 1$ , pak v  $G$  nemůže 1-VMV ohodnocení existovat. Nakonec zmiňme výsledky neexistence daného ohodnocení, které souvisí se stupněm vrcholů. Pokud graf obsahuje cestu  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  takovou, že platí  $\deg(v_2) = \deg(v_4) = 2$ , tak graf  $G$  není 1-VMV. Dále  $G$  nemůže mít 1-VMV ohodnocení, pokud obsahuje dva vrcholy  $v_1, v_2$  takové, že  $|N(v_1) \cap N(v_2)| = \deg(v_1) - 1 = \deg(v_2) - 1$ , nebo pokud v grafu platí:  $\Delta(\Delta + 1) > \delta(2n - \delta + 1)$ , kde  $\Delta$  je největší stupeň v  $G$  a  $\delta$  nejmenší stupeň.

## 4 Hendikepové ohodnocení.

V článku [7] bylo zavedeno ohodnocení, kdy váha vrcholu není konstantní, ale závisí na labelu konkrétního vrcholu.

**Definice 4.1.** *Nechť  $G = (V, E)$  je jednoduchý neorientovaný graf s  $n$  vrcholy. Zobrazení  $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  je nazýváno handikepové ohodnocení, pokud existuje celé číslo  $l$ , takové, že:*

$$\sum_{u \in N(v)} f(u) = l + f(v),$$

kde  $\sum_{u \in N(v)} f(u)$  je váha  $w_f(v)$  vrcholu  $v$ .

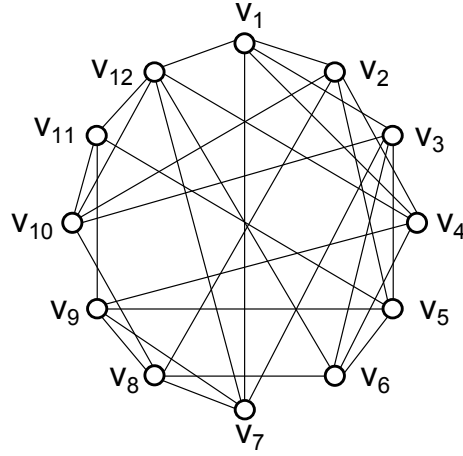
Graf  $G = (V, E)$  který obsahuje hendikepové ohodnocení budeme nazývat hendikepový graf, navíc pro  $r$ -pravidelné grafy umíme spočítat váhu jednotlivým vrcholům  $v_i \in V(G)$ .

Uvedme nyní, některé základní výsledky, z teorie hendikepových ohodnocení:

**Věta 4.1.** [5] *V  $r$ -pravidelném hendikepovém grafu  $G$  na  $n$  vrcholech je váha každého vrcholu dána vztahem:*

$$w(i) = \frac{(r-1)(n+1)}{2} + i$$

V článku [5] je uvedeno několik omezení, kdy hendikepové ohodnocení nemůže existovat. Uvedme si nejdůležitější z nich:



Obrázek 24: Příklad 5-pravidelného grafu  $G$  na 12 vrcholech s hendikepovým ohodnocením, kde  $\ell = 26$ .

**Věta 4.2.** [5] *Neexistuje žádný  $r$ -pravidelný hendikepový graf s  $n$  vrcholy, pokud  $r$  a  $n$  jsou sudá.*

**Věta 4.3.** [5] *Neexistuje  $r$ -pravidelný hendikepový graf s  $n$  vrcholy, jestliže:*

$$r \equiv 1 \pmod{4} \text{ a } n \equiv 2 \pmod{4}.$$

**Věta 4.4.** [5] *Neexistuje žádný netriviální  $r$ -pravidelný hendikepový graf s  $n$  vrcholy, pokud  $r = 1$ ,  $r = 2$ ,  $r = n - 1$  a  $r = n - 2t$ , kde  $t$  patří mezi přirozená čísla.*

V následujících dvou větách budeme využívat následující graf. Graf  $G = c(K_a \square K_b)$  je graf skládající se z  $c$  vzájemně disjunktních kopií kartézského součinu kompletního grafu  $K_a$  a kompletního grafu  $K_b$ .

**Věta 4.5.** [5] *Nechť  $a$  a  $b$  jsou sudá kladná celá čísla taková že  $2 \leq a \leq b$ ,  $4 < ab$  a  $c \in \mathbb{N}$ . Dále nechť  $n = abc$  a  $G = c(K_a \square K_b)$ . Pak doplněk grafu  $G$  je hendikepový graf s  $n$  vrcholy.*

**Věta 4.6.** [6] *Nechť  $a, b, c$  a  $q$  jsou kladná celá čísla, taková že  $1 < q \leq a \leq b$ ,  $4 < ab$ ,  $q|c$ ,  $q < c$  a  $a \equiv b \equiv c \pmod{2}$ . Dále nechť  $n = abc$  a  $G = c(K_a \square K_b)$ . Pak doplněk grafu  $G$  je hendikepový graf s  $n$  vrcholy.*

Na závěr uvedme jednu existenční větu pro 3-pravidelné grafy:

**Věta 4.7.** [5] *Mějme 3-pravidelný hendikepový graf  $G$  s  $n$  vrcholy, pak existuje 3-pravidelný hendikepový graf s  $n + 8$  vrcholy.*

Nyní zkusme hendikepové ohodnocení nějakým způsobem zobecnit tak, abychom obecnější ohodnocení našli i v grafech, které z důvodů tvrzení předešlých dvou vět toto ohodnocení

obsahovat nemohou.

V následujícím textu nás budou zajímat hlavně grafy se sudým počtem vrcholů. Grafy s lichým počtem vrcholů budeme opomíjet, protože budeme dále pracovat z grafy, které mají pravidelnost a počet vrcholů v souladu s větou 4.2, nebo větou 4.3, ve kterých se grafy s lichým počtem vrcholů nevyskytují.

## 5 Zobecnění hendikepového ohodnocení

Můžeme se pokusit vynechat z množiny labelů  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  jeden label a z množiny vah  $\{\ell+1, \ell+2, \dots, \ell+n+1\}$  jednu váhu, kde  $\ell$  je přirozené číslo.

Označme vynechanou váhu symbolem  $x$  a vynechaný label symbolem  $y$ . Rovnice pro výpočet váhy bude tedy vypadat takto:

$$\sum_{u \in N(v)} f(u) - x = \ell + f(v) - y$$

Nyní se pokusme vyjádřit vztah pro konstantu  $\ell$ , sumu vyčíslíme a upravíme:

$$\begin{aligned} n\ell + \sum_{i=1}^{n+1} i - x &= r \left( \sum_{i=1}^{n+1} i - y \right), \\ n\ell + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - x &= r \left( \frac{(n+1)(n+2)}{2} - y \right), \\ n\ell &= \frac{r(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} - ry + x, \\ n\ell &= (r-1) \frac{(n+1)(n+2)}{2} - ry + x, \\ n\ell &= (r-1) \frac{n(n+2)}{2} + \frac{(r-1)1(n+2)}{2} - ry + x, \end{aligned}$$

Dostáváme předpis pro výpočet konstanty  $\ell$  v závislosti na parametrech  $x$  a  $y$ :

$$\ell = \frac{(r-1)(n+2)}{2} + \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{(x-ry)}{n}.$$

Víme, že  $\ell$  musí být celé číslo. Zlomek  $\frac{(r-1)(n+2)}{2}$  je vždy celočíselný ( $n$  je vždy sudé). Nemusíme se tedy tímto výrazem zabývat a můžeme psát:

$$\ell = \frac{(r-1)(n+2)}{2} + k.$$

Kde  $k = \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{(x-ry)}{n}$  a požadujeme, aby  $k$  bylo celé číslo. Nabízí se tedy otázka, jak dosadit hodnoty  $x$  a  $y$  tak, aby  $k$  celé číslo bylo.

$x$  může nabývat hodnoty  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ ,

$y$  může nabývat hodnoty  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ .

Pokusme se nyní určit interval hodnot, které  $k$  může nabývat. Následně určíme meze i pro proměnou  $x$  a  $y$ . Dané meze nám dají hrubý odhad, jaké hodnoty za proměnné dosadit tak, abychom zbylé neznámé dostali celočíselné a tedy mohli se pokusit graf s danou pravidelností a počtem vrcholů sestavit.

### 5.1 Určení mezí pro $k$

Stanovíme tedy nejprve meze intervalu možných hodnot  $k$ , dosadíme do vztahu pro  $k$  hodnoty  $x = n+1, y = 1$ , aby byl zlomek co největší a spočítáme horní mez:

$$\begin{aligned} k &\leq \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{2(n+1-r)}{2n}, \\ k &\leq \frac{rn + 2r - n - 2 + 2n + 2 - 2r}{2n}, \\ k &\leq \frac{n + rn}{2n}, \\ k &\leq \frac{r+1}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Nyní dosadíme hodnoty  $x = 1, y = n+1$ , aby byl zlomek co nejmenší a spočítáme dolní mez:

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{2(1-r(n+1))}{2n}, \\ k &\geq \frac{rn - n - 2 + 2r + 2 - 2rn - 2r}{2n}, \\ k &\geq \frac{-n - rn}{2n}, \\ k &\geq -\frac{r+1}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Parametr  $k$  tedy může nabývat hodnoty z intervalu  $\langle -\frac{r+1}{2}, \frac{r+1}{2} \rangle$ . Tento interval je závislý pouze na stupni pravidelnosti  $r$ , takže čím větší pravidelnost grafu, tím více celých čísel v intervalu bude a tedy můžeme předpokládat více možnosti celých čísel, kterých  $k$  může nabývat.

Dále po snadné úvaze můžeme říct, že ať dosadíme za  $r$  jakoukoliv hodnotu, bude v intervalu  $\langle -\frac{r+1}{2}, \frac{r+1}{2} \rangle$  vždy minimálně jedno celé číslo 0.

### 5.2 Určení mezí pro $x$ a $y$

Nyní, když jsme vyjádřili meze pro konstantu  $k$ , zjistíme podobně meze pro vynechanou váhu  $x$  a vynechaný label  $y$ . Začneme mezemi pro váhu  $x$ .

Do vzorce pro  $k$  dosadíme nejprve tyto hodnoty:  $k = 1$ ,  $y = 1$  a vyjádříme  $x$ . Takto spočteme dolní mez.

$$\begin{aligned}
1 &\geq \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{x-r}{n}, \\
\frac{x-r}{n} &\geq 1 - \frac{(r-1)(n+2)}{2n}, \\
x-r &\geq n - \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\
x &\geq n+r - \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\
x &\geq \frac{2n+2r - (r-1)(n+2)}{2}, \\
x &\geq \frac{2n+2r - rn - 2r + n + 2}{2}, \\
x &\geq \frac{3n - rn + 2}{2}, \\
x &\geq \frac{n(3-r) + 2}{2}.
\end{aligned}$$

Dále dosadíme hodnoty:  $k = 1$ ,  $y = n+1$  a určíme horní mez:

$$\begin{aligned}
1 &\leq \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{x-r(n+1)}{n}, \\
\frac{x-r(n+1)}{n} &\leq 1 - \frac{(r-1)(n+2)}{2n}, \\
x-r(n+1) &\leq n - \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\
x &\leq n+r(n+1) - \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\
x &\leq \frac{2n+2rn+2r - (r-1)(n+2)}{2}, \\
x &\leq \frac{2n+2rn+2r - rn - 2r + n + 2}{2}, \\
x &\leq \frac{3n+rn+2}{2}, \\
x &\leq \frac{n(3+r) + 2}{2}.
\end{aligned}$$

Určili jsme tedy meze intervalu hodnot, které může nabývat vynechaná váha  $x \in \langle \frac{n(3-r)+2}{2}, \frac{n(3+r)+2}{2} \rangle$ , navíc dále musí platit, že  $x \in \langle l+1, l+2, \dots, l+n+1 \rangle$ . Snadno můžeme vyzorovat, že pokud chceme, aby  $x$  bylo celé číslo, nesmí být  $n$  liché a současně  $r$  sudé.



Stejným postupem sestrojíme tentokrát interval pro vynechaný label  $y$ . Pro výpočet dolní meze dosadíme do stejného vzorce, jako v předešlém výpočtu mezi hodnoty  $k = 1$  a  $x = 1$ . Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned}
1 &\leq \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{1-ry}{n}, \\
\frac{1-ry}{n} &\leq 1 - \frac{(r-1)(n+2)}{2n}, \\
1-ry &\leq n - \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\
-ry &\leq n-1 - \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\
-ry &\leq \frac{2n-2-(r-1)(n+2)}{2}, \\
-y &\leq \frac{2n-2-rn-2r+n+2}{2r}, \\
-y &\leq \frac{3n-rn-2r}{2r}, \\
y &\geq \frac{-3n+r(n+2)}{2r}.
\end{aligned}$$

Pro výpočet horní meze dosadíme hodnoty  $k = 1$  a  $x = n+1$ :

$$\begin{aligned}
1 &\geq \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{n+1-ry}{n}, \\
\frac{n+1-ry}{n} &\geq 1 - \frac{(r-1)(n+2)}{2n}, \\
n+1-ry &\geq n - \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\
-ry &\geq -1 - \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\
-ry &\geq \frac{-2-(r-1)(n+2)}{2}, \\
-y &\geq \frac{-2-rn+2+n-2r}{2r}, \\
-y &\geq \frac{-rn+n-2r}{2r}, \\
y &\leq \frac{-n+r(n+2)}{2r}.
\end{aligned}$$

Pro label tedy dostáváme interval  $\langle \frac{-3n+r(n+2)}{2r}, \frac{-n+r(n+2)}{2r} \rangle$ . Opět se pokusíme určit nějaké omezení na pravidelnost  $r$  a počet vrcholů  $n$ . Z mezí intervalů je zřejmé, že omezení na pravidelnost žádné není. Naopak můžeme pozorovat, že počet vrcholů musí být sudé číslo.

### 5.3 Vynechání prvku v množině vah a množině labelů

Pokud jsme za proměnné  $k$ ,  $r$  a  $n$  do vzorce pro výpočet konstanty  $k = \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{(x-ry)}{n}$  dosadili různé hodnoty, tak většina těchto výpočtů nevyšla (v tom smyslu, že jedna z proměnných  $x$ ,  $y$  nepadla do příslušného intervalu) a zdá se že tento postup nikam nevede, zkusme nyní zvolit jiný přístup. Chceme-li, aby váhy(labely) tvořily aritmetickou posloupnost, musíme vynechat váhu (label) 1 nebo  $n + 1$ .

Dosaďme tedy postupně tuto váhu (label) přímo do vzorce pro konstantu  $k$  a vyjádříme. Z výsledného vztahu se pokusíme určit jak správně konstantu  $k$ , pravidelnost  $r$  a počet vrcholů  $n$  vyjádřit tak, aby nám zbylá proměnná  $x(y)$  patřila do intervalu, který jsme pro tuto proměnnou již určili.

Nejprve se tedy pokusme dosáhnout toho, aby váhy tvořily aritmetickou posloupnost. Máme tedy dvě možnosti, kterou váhu vynechat, a to první (1) a poslední ( $n + 1$ ) váhu. Nejdříve dosadíme do rovnice pro  $k$  za  $x = n + 1$ . Tímto dosazením dostáváme opět rovnici (1). Ovšem nyní nebudeme hledat horní mez, ale pravou stranu položíme rovnu straně levé.

$$\begin{aligned} k &= \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{2(n+1-ry)}{2n}, \\ k &= \frac{rn+2r-n-2+2n+2-2ry}{2n}, \\ 2kn &= rn+n+2r-2ry, \\ 2kn &= n(r+1)+2r(1-y), \\ k &= \frac{2r(1-y)+n(r+1)}{2n}, \\ k &= \frac{r+1}{2} + \frac{r(1-y)}{n} \Rightarrow \\ y &= \frac{n(-2k+r+1)+2r}{2r}. \end{aligned}$$

Nyní postup zopakujeme, ale za proměnnou  $x$  dosadíme 1. Váhy tedy budou tvořit stále aritmetickou posloupnost.

$$\begin{aligned} k &= \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{2(1-ry)}{2n}, \\ k &= \frac{rn+2r-n-2+2-2ry}{2n}, \\ 2kn &= rn+2r-n-2ry, \\ 2kn &= n(r-1)+2r(1-y), \\ k &= \frac{n(r-1)+2r(1-y)}{2n}, \\ k &= \frac{r-1}{2} + \frac{r(1-y)}{n} \Rightarrow \\ y &= \frac{n(-2k+r-1)+2r}{2r}. \end{aligned}$$

K těmto dvěma výsledným rovnicím můžeme dále doplnit podmínky:

- $2 \leq r \leq n - 2$ ,
- $1 \leq y \leq n + 1$ , pro  $x = 1$ ,
- $1 \leq y \leq n$ , pro  $x = n + 1$ .

První podmínka nám říká, že pravidelnost musí být nejméně 2 a nejvíce  $n - 2$ . Pravidelnost nemůže být rovna  $n$ , protože graf, který má pravidelnost rovnou počtu vrcholů neexistuje. Dále musíme vynechat i hodnotu  $r = n - 1$ , protože tento graf je kompletní graf a v takovémto grafu hendikepové ohodnocení neexistuje. Tento argument také můžeme uplatnit na nejmenší možnou hodnotu  $r$ .  $r$  nemůže nabývat hodnotu jedna, protože takový souvislý graf má pouze dva vrcholy a je tedy kompletní.

Druhá podmínka je podmínka na vynechaný label. Vynechaný label, jak jsme již zmínili výše, může nabývat hodnoty z množiny  $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ . Musíme si ovšem dát pozor, pokud  $x = n + 1$ , tak již nemůžeme dosadit za  $y = n + 1$ , protože pokud by  $x$  i  $y$  současně nabývalo hodnoty  $n + 1$ , jednalo by se hendikepové ohodnocení a tento typ ohodnocení nás nezajímá.

Nyní budeme požadovat, aby labely tvořily aritmetickou posloupnost. Stejně jako v případě vah postupně dosadíme do rovnice pro  $k$  za  $y$  hodnotu  $n + 1$  a následně hodnotu 1. Po obou těchto dosazení vyjádříme konstantu  $k$  a následně druhou proměnnou  $x$ . Dosadíme tedy  $y = n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{(r - 1)(n + 2)}{2n} + \frac{2(x - r(n + 1))}{2n}, \\
 k &= \frac{rn + 2r - n - 2 + 2x - 2rn - 2r}{2n}, \\
 2kn &= 2x - rn - n - 2, \\
 2kn &= 2(x - 1) - n(r + 1), \\
 k &= \frac{2(x - 1) - n(r + 1)}{2n}, \\
 k &= \frac{x - 1}{n} - \frac{r + 1}{2} \Rightarrow \\
 x &= \frac{n(2k + r + 1) + 2}{2}.
 \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy předpis pro  $k$  po dosazení  $y = n + 1$ , nyní výpočet zopakujeme pro  $y = 1$ :

$$\begin{aligned}
k &= \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{2(x-r)}{2n}, \\
k &= \frac{rn + 2r - n - 2 + 2x - 2r}{2n}, \\
2kn &= rn - n - 2 + 2x, \\
2kn &= 2(x-1) + n(r-1), \\
k &= \frac{2(x-1) + n(r-1)}{2n}, \\
k &= \frac{x-1}{n} + \frac{r-1}{2} \Rightarrow \\
x &= \frac{n(2k - r + 1) + 2}{2}.
\end{aligned}$$

I zde můžeme doplnit podmínky:

- $2 \leq r \leq n - 2$ ,
- $1 \leq x \leq n + 1$ , pro  $y = 1$ ,
- $1 \leq x \leq n$ , pro  $y = n + 1$ .

Podmínky jsou stejné, jako v případě rovnic, kdy jsme dosazovali za proměnou  $x$ . Shrňme nyní dosažené výsledky a pokusme se dostat nějaké omezení na sudost/lichost pravidelnosti, nebo počtu vrcholů.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{n(-2k + r + 1) + 2r}{2r}, \text{ pro } x = n + 1. \\
y &= \frac{n(-2k + r - 1) + 2r}{2r}, \text{ pro } x = 1. \\
x &= \frac{n(2k - r + 1) + 2}{2}, \text{ pro } y = 1. \\
x &= \frac{n(2k + r + 1) + 2}{2}, \text{ pro } y = n + 1.
\end{aligned}$$

Protože znaménko  $+$  a znaménko  $-$  nemá na sudost/lichost celkového čitatele vliv můžeme vzorce přepsat do následující podoby:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{n(-2k + r - 1) + 2r}{2r}. \\
x &= \frac{n(2k \mp r + 1) + 2}{2}.
\end{aligned}$$

Pokud chceme, aby proměnné  $x$  a  $y$  byly celé číslo musí být čitatel obou zlomků sudý. Podívejme se nejprve na čitatel prvního zlomku:

$$n(-2k + r \pm 1) + 2r.$$

Chceme, aby tento výraz bylo sudé číslo. Hodnotu  $2r$  je vždy sudá a nemusíme se jí tedy zabývat a následně si tento výraz můžeme pro jednoduchost napsat do následující podoby:

$$n(-S + r \pm L),$$

kde  $S$  je sudé číslo,  $L$  liché číslo. Pokud by  $n$  bylo liché číslo tak výraz

$$(-S + r \pm L),$$

musí být sudý, protože v závorce máme sudé, plus/mínus liché číslo dostaneme z tohoto součtu/rozdílu opět liché číslo a můžeme psát:

$$(L + r).$$

Můžeme tedy říct, pokud chceme, aby výraz v čitateli byl sudý, musí pro  $n$  liché být  $r$  liché (ale takový graf podle principu sudosti neexistuje). V našem případě nás zajímají pouze  $n$  sudé. Protože sudé číslo je po vynásobení sudým i lichým číslem opět sudé, můžeme říct, že celková hodnota v závorce  $(-S + r \pm L)$  může být jakákoliv a tedy i pravidelnost  $r$  může být libovolná.

Pokud použijeme stejné úvahy i v čitateli druhého zlomku:

$$n(2k \pm r + 1) + 2,$$

dostaneme stejný závěr. Tedy  $r$  může být libovolné.

## 6 Upravené hendikepové ohodnocení

Připomeňme, že v textu se zaměřujeme na grafy se sudým počtem vrcholů, tedy s  $2n$  vrcholy.

**Definice 6.1.** *Nechť  $G = (V, E)$  je jednoduchý neorientovaný graf s  $2n$  vrcholy. Zobrazení  $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \cup \{\frac{n+4}{2}, \dots, n+1\}$  je nazýváno upravené hendikepové ohodnocení pokud existuje číslo  $\ell$ , takové, že:*

$$\sum_{u \in N(v)} f(u) = \ell + f(v),$$

kde  $\sum_{u \in N(v)} f(u)$  je váha  $w_f(v)$  vrcholu  $v$ .

Jedná se tedy o takové vrcholové ohodnocení, kdy váha  $i$ -tého vrcholu v grafu lze vypočítat, jako konstanta  $\ell$  plus label daného vrcholu  $f(i)$ . Přičemž v množině vrcholů  $V$  je vynechaný label  $\frac{(n+2)}{2}$  (prostředního) vrcholu a jeho váha.

Nyní zvolme  $x = y$ . Tato volba nám přijde jako přirozená. Je vhodné, abychom s vynechaným labelem vrcholu vynechali zároveň i jeho váhu. Výhoda této volby je například při vynechání labelu a váhy vrcholu  $n+1$ . Tímto vynecháním dostaneme upravené hendikepové ohodnocení, které je vlastně klasické hendikepové ohodnocení, protože váhy i labely tvoří aritmetickou posloupnost.

**Tvrzení 6.1.** *Mějme jednoduchý neorientovaný graf  $G = (V, E)$ , který má upravené hendikepové ohodnocení. Předpokládejme, že:*

- $x = y$ ,
- $\frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{(x-ry)}{n} = 0$ ,

kde  $x$  je vynechaná váha,  $y$  vynechaný label,  $r$  pravidelnost grafu a  $n$  počet vrcholů grafu. Potom konstanta  $\ell$  je určena jednoznačně podle vztahu  $\ell = \frac{(r-1)(n+2)}{2}$ .

*Důkaz.* Nejprve:

označme symbolem  $x$  vynechanou váhu z posloupnosti  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  a symbolem  $y$  vynechaný label vrcholu z posloupnosti  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ . Můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned}
 n\ell + \sum_{i=1}^{n+1} i - x &= r \left( \sum_{i=1}^{n+1} i - y \right), \\
 n\ell + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - x &= r \left( \frac{(n+1)(n+2)}{2} - y \right), \\
 n\ell &= \frac{r(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} - ry + x, \\
 n\ell &= (r-1) \frac{(n+1)(n+2)}{2} - ry + x, \\
 n\ell &= (r-1) \frac{n(n+2)}{2} + \frac{(r-1)1(n+2)}{2} - ry + x, \\
 \ell &= \frac{(r-1)(n+2)}{2} + \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{(x-ry)}{n}.
 \end{aligned}$$

Nyní použijeme předpokladů a vyřešíme dvojici rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}
 x &= y, \\
 \frac{(r-1)(n+2)}{2n} + \frac{(x-ry)}{n} &= 0, \\
 \frac{(r-1)(n+2)}{2} &= -x + rx, \\
 \frac{(r-1)(n+2)}{2} &= -x(1-r), \\
 \frac{(r-1)(n+2)}{2} &= x(r-1), \\
 \frac{(n+2)}{2} &= x.
 \end{aligned}$$

Po dosazení za  $x$  a  $y$  do rovnice pro výpočet konstanty  $\ell$  dostaneme hodnotu  $\ell$ :

$$\ell = \frac{(r-1)(n+2)}{2}$$

□

**Důsledek 6.1.** Ze získaného vztahu pro konstantu  $\ell$  vyplývá, že upravené hendikepové ohodnocení existuje pouze na grafech se sudým počtem vrcholů. Pokud by  $n$  bylo liché, musela by být  $r$  také liché, aby konstanta  $\ell$  vyšla celé číslo. Z principu sudosti víme, že neexistují grafy které mají  $r$  i  $n$  současně liché. Dále jsme určili label vrcholu který, musíme vynechat. Jedná se o label vrcholu  $\frac{n+2}{2}$  a z požadavku  $x = y$  plyne, že vynechaná váha je právě vahou tohoto vrcholu.

Všimněme si, že v upraveném hendikepovém ohodnocení se konstanta  $\ell$  vypočítá

$$\ell = \frac{(r-1)(n+2)}{2},$$

na rozdíl od hendikepového ohodnocení, kde

$$\ell = \frac{(r-1)(n+1)}{2}.$$

Můžeme se tedy pokusit, najít upravené hendikepové ohodnocení v grafech splňujících podmínky věty 4.3, které nemohou obsahovat hendikepové ohodnocení. Nejprve se zaměříme na grafy, které budou mít počet vrcholů  $n \equiv 2 \pmod{4}$  a pravidelnost  $r = 2$ .

Protože 1-pravidelné hendikepové grafy neexistují, tak se v dalším textu budeme soustředit na grafy 2-pravidelné.

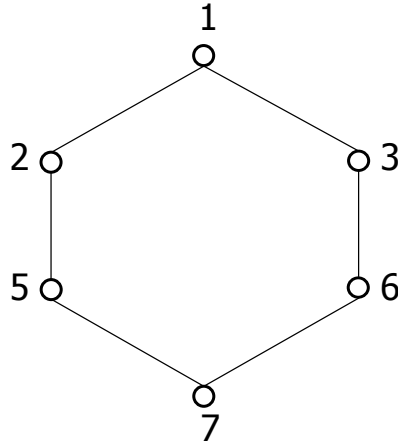
## 6.1 2-pravidelné grafy

Podarilo se nám nalézt hendikepové ohodnocení v následujících 2-pravidelných grafech. Nejmenší takový 2-pravidelný graf má  $n = 6$  vrcholů. Spočítáme tedy label který musíme vynechat. Dosadíme do výše uvedeného vzorce:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(n+2)}{2}, \\ x &= \frac{(6+2)}{2}, \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Musíme tedy vynechat label  $f(v) = 4$ . Nyní spočteme konstantu  $l$ . Opět dosadíme do již známého vztahu:

$$\begin{aligned} l &= \frac{(r-1)(n+2)}{2}, \\ l &= \frac{(2-1)(6+2)}{2}, \\ l &= 4. \end{aligned}$$



Obrázek 25: Graf  $G_1$  s upraveným hendikepovým ohodnocením.

Výsledný graf má tedy množinu labelů  $f(v) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  a množinu vah  $w(v) = \{5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ . Navíc jeho konstrukce je určena jednoznačně. Má-li váha vrcholu 1, být 5 jsou jeho sousedé 2 a 3 určeni jednoznačně. Sousedním vrcholům vrcholů 1 bude chybět pouze jeden další soused. Máme pak pouze jednu možnost, jak přiřadit vrcholům chybějící sousedy, aby jednotlivé váhy korespondovaly s výpočtem. Takto budeme pokračovat, dokud nebudeme mít graf na obrázku (25) zkonstruovaný.

**Věta 6.1.** *Mějme 2-pravidelný graf  $G$  s upraveným hendikepovým ohodnocením, pak platí:*

*každá komponenta  $G$  je isomorfní s  $C_6$ .*

*Důkaz.* Nejprve si zvolme v grafu  $G$  libovolný vrchol  $a$  a jeho souseda vrchol  $b$ . Z předpokladů věty víme, že v daném grafu  $G$  existuje upravené hendikepové ohodnocení. Můžeme tedy podle definice (6.1) určit váhu vrcholu  $a$ ,  $w_f(a) = l + a$  a váhu vrcholu  $b$ ,  $w_f(b) = l + b$ . Situace je znázorněná na obrázku 26. Váhy jsou vyznačeny modře a labely barvou zelenou.



Obrázek 26: Vrchol  $a$  se sousedním vrcholem  $b$ .

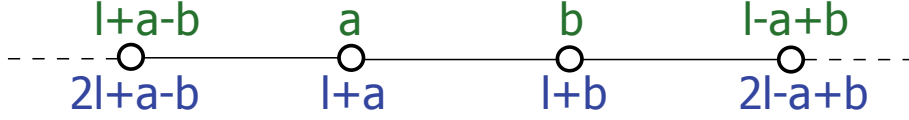
Protože graf  $G$  je 2-pravidelný, má každý vrchol  $a$  i vrchol  $b$  ještě jednoho souseda. Vrchol  $a$  má mít váhu  $l + a$ . Abychom dostali požadovanou váhu, musí mít jeho druhý sousední vrchol label  $l + a - b$ . Stejně budeme nyní postupovat i pro label druhého souseda vrcholu  $b$ . Druhý soused musí být s labelem  $l + b - a$ .



Dále se podíváme na vrcholy  $l + a - b$  a  $l - a + b$ , obrázek 27. Protože známe jejich váhu:

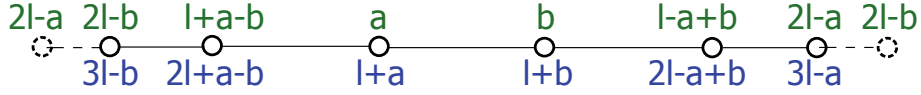
$$\begin{aligned} w_f(l + a - b) &= l + l + a - b = 2l + a - b, \\ w_f(l - a + b) &= l + l - a + b = 2l - a + b, \end{aligned}$$

je label druhého souseda vrcholu  $l + a - b$  i  $l - a + b$  jednoznačně určen.



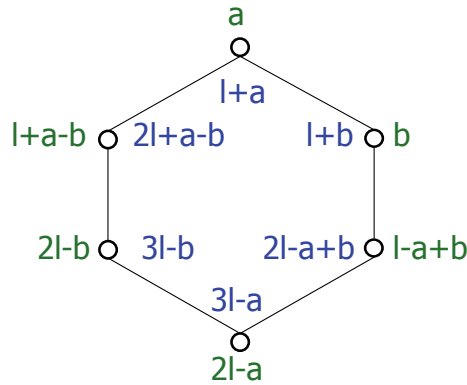
Obrázek 27: Přidání souseda vrcholu  $a$  a souseda vrcholu  $b$ .

Abychom pro vrchol  $l + a - b$  dostali požadovanou váhu, musí mít jeho druhý soused label  $2l - b$ . Dále pak vrchol  $l - a + b$  musí mít souseda  $2l - a$ . I vrcholy  $2l - b$ ,  $2l - a$  mají ještě jednoho souseda. Vrchol  $2l - b$  má mít váhu  $l + 2l - b = 3l + b$  a vrchol  $2l - a$  má mít váhu  $l + 2l - a = 3l - a$ . Label jejich druhého souseda je tedy daný. Vrchol  $2l - b$  musí být sousedem  $2l - a$  a vrcholu  $2l - a$  sousedem vrcholu  $2l - b$  (obr.28).



Obrázek 28: Přidání souseda vrcholu  $l+a-b$  a souseda vrcholu  $l-a+b$ .

Nyní si stačí všimnout, že vrcholu  $2l - a$  musí být sousední s vrcholem  $2l - b$  a vrchol  $2l - b$  musí být sousedem vrcholu  $2l - a$ . Tyto dva vrcholy jsou tedy propojeny hranou. Protože všechny vrcholy jsou již stupně dva, nemá žádný z nich už dalšího souseda. Dostali jsme tedy komponentu  $C_6$ , která je znázorněná na obrázku (29).



Obrázek 29: Komponenta  $C_6$ .

Protože stejnou argumentaci můžeme použít pro libovolné dva sousední vrcholy  $a, b$ , bude výsledný graf  $G \cong kC_6$ , kde  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , pokud existuje.

Musíme ještě ukázat, že každé dva vrcholy a labely jsou různé a jedná se tak o cyklus  $C_6$ . Protože vrcholy  $a$  a  $b$  jsou různé, budou jistě různé i dvojice vrcholů  $\{l + a - b, l - a + b\}$  a  $\{2l - a, 2l - b\}$ .

Dále platí  $a \neq l, b \neq l$  (pro 2-pravidelné grafy je hodnota  $l$  rovna hodnotě vynechaného labelu), dvojice  $\{a, 2l - a\}, \{b, 2l - b\}$  budou tedy také různé.

Také nemůže nastat  $a = l - a + b$  ani  $b = l + a - b$ . Pokud by se tak stalo, v grafu  $G$  by byly pouze vrcholy  $a, b$  a graf by nebyl 2-pravidelný, to je ve sporu s předpokladem.

Nyní sporem ukážeme, že se nerovnejí dvojice vrcholů  $\{a, 2l + a - b\}$  ani  $\{b, 2l - a + b\}$ . Předpokládejme:

$$\begin{aligned} a &= l + a - b, \\ b &= l - a + b, \end{aligned}$$

upravíme:

$$\begin{aligned} l &= b, \\ l &= a, \end{aligned}$$

a dostáváme spor s tvrzením  $a \neq l, b \neq l$ .

Zbývá tedy ukázat, že  $l + a - b \neq 2l - a$  a  $l - a + b \neq 2l - b$ . V tomto případě budeme opět postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že platí:

$$\begin{aligned} l + a - b &= 2l - a, \\ l - a + b &= 2l - b. \end{aligned}$$

Rovnice nyní upravíme do tvaru:

$$\begin{aligned} a &= l - a + b, \\ b &= l + a - b. \end{aligned}$$

A to je opět spor. Jak jsme ukázali výše, toto z důvodu 2-pravidelnosti grafu platit nemůže. Důkaz je tedy kompletní.  $\square$

**Věta 6.2.** *Mějme 2-pravidelný graf s upraveným hendikepovým ohodnocením. Pak jsou splněny následující podmínky:*

1. každá komponenta  $G$  je izomorfní s  $C_6$ ,
2. počet vrcholů  $n$  se nesmí rovnat  $n \equiv 12 \pmod{24}$  a  $n \equiv 18 \pmod{24}$ .

*Důkaz.* Rozdělíme důkaz na dvě části, podle jednotlivých nutných podmínek:

1) Podmínka:

Mějme 2-pravidelný graf  $G$  s upraveným hendikepovým ohodnocením. Struktura grafu  $G$  je daná větou 6.1. Víme tedy, že každá komponenta grafu  $G$  je izomorfní s cyklem  $C_6$ .

2) Podmínka:

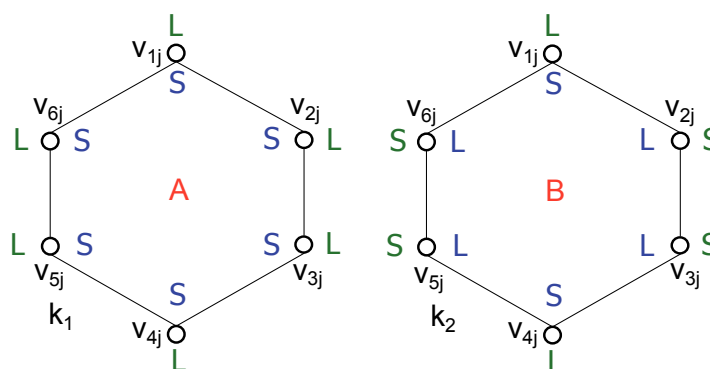
Nyní ukážeme, že neexistuje v grafu  $G$  hendikepové ohodnocení, pokud platí, že  $n \equiv 12, 18 \pmod{24}$ . ( $\pmod{24}$  volíme z důvodu přehlednosti jednotlivých variant uspořádání vrcholů v cyklu  $C_6$ ). Uvedme nejprve všechny čtyři možnosti, které mohou nastat:  $n \equiv 0, 6, 12, 18 \pmod{24}$ . Tyto možnosti rozdělíme na dvě kategorie:

1.  $\ell = \frac{n+2}{2}$  je liché, tedy pro tyto případy  $n \equiv 0, 12 \pmod{24}$ ,
2.  $\ell = \frac{n+2}{2}$  je sudé, tedy pro tyto případy  $n \equiv 6, 18 \pmod{24}$ .

Připomeňme, že pro  $n = 6$  již konstrukci 2-pravidelného grafu  $G$ , který obsahuje hendikepové ohodnocení, známe. Je zřejmé, že případ kdy  $n = 0$  řešit také nemusíme. Podívejme se nyní postupně na jednotlivé kategorie.

Nejprve se budeme zabývat možností 1), kdy  $\ell$  je liché. Z definice upraveného hendikepového ohodnocení 6.1 víme, že váha jednotlivých vrcholů se vypočítá pomocí vzorce  $w_f(v) = \ell + f(v)$ . To znamená, že vrcholy se sudým labelem mají lichou váhu a vrcholy s lichým labelem mají váhu sudou.

Předpokládejme, že vrchol  $v_{1j}$  a  $v_{2j}$  má lichý label, tedy má sudou váhu. Protože vrchol  $v_{2j}$  má lichý label, musí mít vrchol  $v_{6j}$  také lichý label, aby bylo splněno, že  $v_{1j}$  má sudou váhu (liché číslo plus liché je sudé číslo). Aby i pro vrchol  $v_{2j}$  platilo, že bude mít sudou váhu, musí mít vrchol  $v_{3j}$  také label lichý. Vrchol  $v_{6j}$  má lichý label, aby měl i tento vrchol sudou váhu, musí mít i vrchol  $v_{5j}$  label lichý. Je zřejmé, že vrchol  $v_{4j}$  bude mít také lichý label a sudou váhu (protože, vrchol  $v_{3j}$  i vrchol  $v_{5j}$  mají lichý label). Tato možnost je na obrázku 30 označena velkým červeným písmenem  $A$  (modře je znázorněna parita jednotlivých vah vrcholů, zeleně parita jednotlivých labelů vrcholů a  $k_1$  udává celkový počet cyklu  $C_6$  typu  $A$  v grafu  $G$ ).



Obrázek 30: Zobrazení parit labelů a vah vrcholu grafu  $G$ , kdy  $\ell$  je liché.

Nyní předpokládejme, že vrchol  $v_{1j}$  má lichý label, tedy sudou váhu a vrchol  $v_{2j}$  má sudý label, lichou váhu. To znamená, že vrchol  $v_{6j}$  bude mít sudý label, lichou váhu.  $v_{2j}$  má mít váhu lichou a vrchol  $v_{1j}$  má lichý label, tedy vrchol  $v_{3j}$  musí mít sudý label a

lichou váhu. Stejnou úvahou můžeme argumentovat v případě vrcholu  $v_{5j}$ , který tedy také musí mít sudý label a lichou váhu. Posledním vrcholem v daném cyklu  $C_6$  je vrchol  $v_{4j}$ . Protože jeho dva sousední vrcholy ( $v_{3j}$  a  $v_{5j}$ ) mají lichý label, bude mít  $v_{4j}$  váhu sudou a tedy lichý label. Tento případ je na obrázku 30 označen velkým červeným písmenem  $B$  ( $k_2$  udává celkový počet cyklu  $C_6$  typu  $B$  v grafu  $G$ ).

Jakoukoliv další variantou parity labelů a vah vrcholu  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$  (tedy, že  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$  mají sudý label, lichou váhu, nebo varianta, kdy vrchol  $v_{1j}$  má sudý label, lichou váhu a vrchol  $v_{2j}$  má lichý label, sudou váhu.) dostaneme otočený cyklus typu  $B$ .

Případ, kdy  $\ell$  je liché znamená, že číslo které z posloupnosti labelů vynecháme je liché. Celkový počet vrcholů  $n$  grafu  $G$  je sudý, tedy label  $n + 1$ , který přidáme do posloupnosti labelů místo labelu  $\frac{n+2}{2}$  bude lichý. Můžeme tedy konstatovat, že v grafu  $G$  je stejný počet sudých čísel jako lichých (z aritmetické posloupnosti se sudým počtem čísel jsme jedno liché číslo vynechali a následně jedno liché číslo přidali). Spočteme nyní, kolik lichých čísel a sudých je v grafu celkem.

Lichých čísel v cyklu typu  $A$  je 6, v cyklu  $B$  jsou lichá čísla 2 a sudá čísla 4. Protože sudých a lichých čísel musí být stejně můžeme psát následující rovnici, kde na levé straně je počet lichých labelů v celém grafu a na pravé straně počet sudých labelů v celém grafu:

$$6k_1 + 2k_2 = 4k_2,$$

kterou upravíme do tvaru:

$$3k_1 = k_2.$$

Z této rovnice vyplývá, že v grafu  $G$  musí být na každý cyklus typu  $A$  tři cykly typu  $B$ . Celkový počet cyklů v  $G$  je tedy

$$3k_1 + k_1 = 4k_1.$$

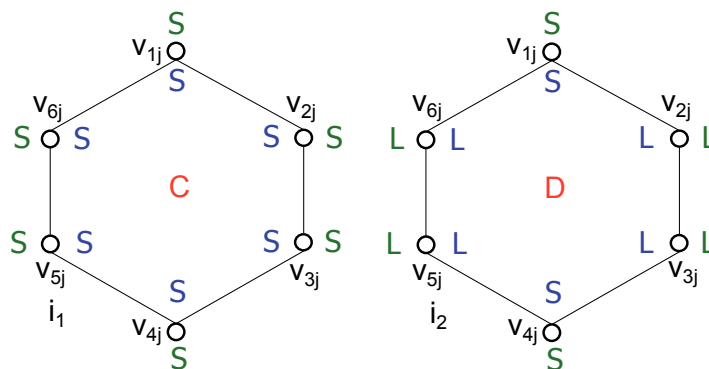
Pro případ 1), kdy  $\ell$  je liché, nyní můžeme psát, že počet cyklu  $C_6$  je násobek 4, takže pro 2-pravidelný graf neexistuje hendikepové ohodnocení, pokud  $n = 12 \pmod{24}$ .

Podívejme se teď na případ 2), kdy  $\ell$  je sudé. Vrcholy se sudým labelem budou mít sudou váhu a vrcholy s lichým labelem budou mít lichou váhu. Stejně jako v případě kdy  $\ell$  bylo liché, i zde existují dva způsoby, jak uspořádat vrcholy do cyklů tak, aby parita labelů a vah odpovídala.

Nejprve předpokládáme, že vrchol  $v_{1j}$  má stejně jak vrchol  $v_{2j}$  sudý label a sudou váhu. Použijeme stejný úsudek jak v prvním případě, kdy  $\ell$  bylo liché a určíme, že všechny ostatní vrcholy musím mít také sudý label, sudou váhu. Tato varianta cyklu  $C_6$  je znázorněna na

obrázku 31 velkým červeným písmenem  $C$  (modře jsou opět znázorněny váhy, zeleně labely a číslo  $i_1$  udává celkový počet cyklu  $C_6$  typu  $C$  v grafu  $G$ ).

Druhá varianta je taková, kdy vrchol  $v_{1j}$  má sudý label, sudou váhu a vrchol  $v_{2j}$  má lichý label, tedy lichou váhou. Opět stejně jako v předešlých případech odvodíme pro ostatní vrcholy paritu jejich labelů a vah. Tato varianta je na obrázku 31 označena velkým červeným písmenem  $D$  ( $i_2$  je celkový počet cyklu  $C_6$  typu  $D$  v grafu  $G$ ). Stejně jako v předchozím případě, i zde pro ostatní možnosti parity labelů a vah vrcholů  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$  dostaneme opět cyklus  $C_6$  typu  $D$ , pouze jinak natočený.



Obrázek 31: Zobrazení parit labelů a vah vrcholu grafu  $G$ , kdy  $\ell$  je sudé.

V případě, kdy číslo  $\ell$  je sudé, neplatí, že v grafu  $G$  je stejný počet sudých a lichých čísel. Protože z posloupnosti labelů vynecháme sudé číslo a místo něho přidáme číslo liché (stejně jako v předešlém případě bude číslo  $n + 1$  liché, protože celkový počet labelů  $n$  je sudý), bude v grafu  $G$  o dvě lichá čísla více, než čísla sudé. Spočteme tedy počet sudých a lichých čísel.

V cyklu typu  $C$  je 6 sudých čísel, v typu  $D$  jsou 2 sudá čísla a 4 čísla lichá. Musíme si dát ovšem pozor, protože v tomto případě je v grafu  $G$  o dvě lichá čísla více, než čísel sudých (např.  $n = 6$  jsou lichá čísla 1, 3, 5, 7 a sudá 2, 6). Píšeme tedy rovnici, opět na levé straně rovnice je počet lichých labelů v celém grafu a na pravé straně je počet sudých labelů v celém grafu:

$$2 + 6i_2 + 2i_1 = 4i_1,$$

rovnici upravíme:

$$1 + 3i_2 = i_1.$$

To znamená, že pokud je v grafu  $G$  jeden cyklus typu  $C$ , musí graf  $G$  spolu s ním také obsahovat tři plus jeden cyklus typu  $D$ . Celkový počet cyklů v grafu  $G$  je:

$$I_2 + 3i_2 + 1 = 4i_2 + 1.$$

Tedy pro případ 2), kdy  $\ell$  je sudé, musí v grafu  $G$  platit, že  $n = 6 \pmod{24}$  z tohoto důvodu pro 2-pravidelné grafy, které mají počet vrcholů  $n = 18 \pmod{24}$ , neexistuje upravené hendikepové ohodnocení.

Důkaz je tedy hotov.  $\square$

V další kapitole zmíníme nutné podmínky existence upraveného hendikepového ohodnocení pro 2-pravidelné grafy.

## 6.2 Existence upraveného hendikepového ohodnocení pro 2-pravidelné grafy

Nyní se budeme zabývat otázkou, pro jaký počet vrcholů v 2-pravidelném grafu upravené hendikepové ohodnocení existuje.

**Věta 6.3.** *Upravené hendikepové ohodnocení pro 2-pravidelný graf  $G$  na  $n$  vrcholech existuje jestliže*

$$n \equiv 0 \pmod{24},$$

*navíc struktura grafu je jednoznačně určená. Jedná se o  $tC_6$ , kde  $t = \frac{n}{6}$ .*

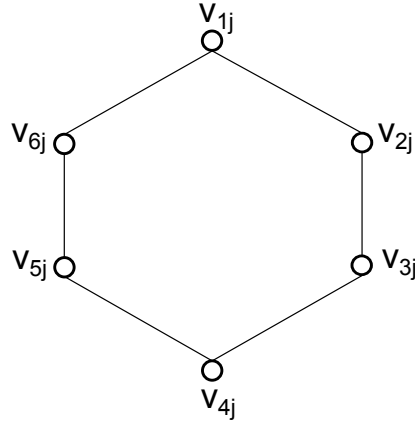
*Důkaz.* 1) Důkaz existence:

Pro dokázání existence budeme postupovat konstruktivně. K vytvoření konstrukce jsme modifikovali konstrukci z důkaz tvrzení o existenci graciózního ohodnocení cyklu v článku [8]. Popíšeme postup, jak sestavit 2-pravidelný graf na  $n \equiv 0 \pmod{24}$  vrcholech tak, aby tento graf měl upravené hendikepové ohodnocení. Uvažujme v jednotlivých cyklech  $C_6$  pořadí vrcholů, které je znázorněno na obrázku 32.

Mějme graf  $G = t \cdot C_6$ . Nyní označme:

$i$  jako index vrcholu v cyklu,  $j$  jako číslo cyklu,  $v_{ij}$  jako  $i$ -tý vrchol  $j$ -tého cyklu a ohodnocení  $\lambda : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n + 1\}$ . Nyní budeme jednotlivým vrcholům labely přiřazovat následujícím způsobem:

$$\lambda(v_{ij}) = \begin{cases} \frac{n}{8} & i = 1 \text{ a } j = 1 \\ \frac{j-1}{2} & i = 1, j \text{ liché a } j > 1 \\ \frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2} & i = 1, j \text{ sudé a } j \leq \frac{n}{12} \\ \frac{n}{3} - \frac{j}{2} & i = 1, j \text{ sudé a } j > \frac{n}{12} \\ \frac{n}{8} + \frac{n}{6} & i = 2 \text{ a } j = 1 \\ \frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2} & i = 2, j \text{ liché a } 1 < j < \frac{n}{12} \\ \frac{n}{6} - \frac{j+1}{2} & i = 2, j \text{ liché a } j > \frac{n}{12} \\ \frac{j}{2} + \frac{n}{6} & i = 2, j \text{ sudé a } j < \frac{n}{6} \\ \frac{n}{6} & i = 2, j \text{ sudé a } j = \frac{n}{6} \end{cases}$$



Obrázek 32: Pořadí vrcholů v jednotlivých komponentách  $C_6$  grafu  $G$ .

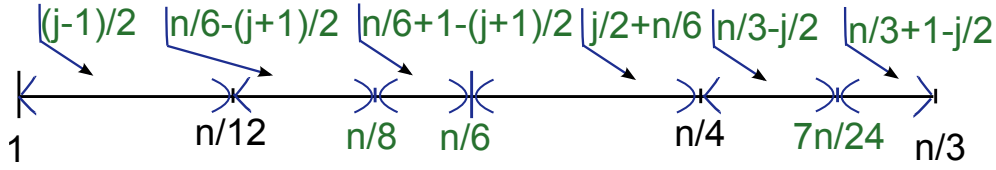
Nyní dopočítáme zbývající labely vrcholů v jednotlivých cyklech grafu:

$$\begin{aligned}
 & \frac{n+2}{2} - v_{1j} + v_{2j}, \text{ pro } i = 3, \\
 & n + 2 - v_{1j} \text{ pro } i = 4, \\
 & n + 2 - v_{2j} \text{ pro } i = 5, \\
 & \frac{n+2}{2} - v_{2j} + v_{1j}, \text{ pro } i = 6.
 \end{aligned}$$

2) Popis zobrazení:

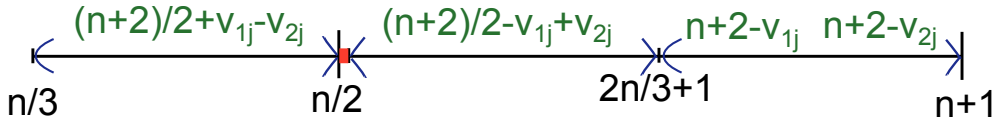
Nyní ukažme, že námi definované zobrazení je zobrazení bijektivní, speciálně, že každý vzor má právě jeden svůj obraz. Vezmeme jednotlivé řádky předpisu zobrazení a určíme interval do kterého se zobrazí.

Je triviální si rozmyslet, že předpisem z prvního řádku dostaneme vždy label hodnoty  $\frac{n}{8}$ . Hodnoty dané předpisem  $\frac{j-1}{2}$  budou labely z intervalu  $\langle 1, \frac{n}{12} \rangle$ . Další na řadě jsou hodnoty vypočtené předpisem  $\frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2}$ , tato čísla budou labely z intervalu  $\langle \frac{7n}{24}, \frac{n}{3} \rangle$ . Dále vezmeme čísla s předpisem  $\frac{n}{3} - \frac{j}{2}$ , tyto hodnoty budou labely z intervalu  $\langle \frac{n}{4}, \frac{7n}{24} \rangle$ . Číslo  $\frac{n}{8} + \frac{n}{6}$  bude label téže hodnoty tedy  $\frac{n}{8} + \frac{n}{6} = \frac{7n}{24}$ . Předpisem  $\frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2}$  budou vypočteny labely v intervalu  $\langle \frac{n}{8}, \frac{n}{6} \rangle$  a následně předposledním předpisem  $\frac{j}{2} + \frac{n}{6}$  dosáhneme labelů z intervalu  $\langle \frac{n}{6} + 1, \frac{n}{4} \rangle$ . Zbývající label  $\frac{n}{6}$  budou zastoupeny posledním předpisem  $\frac{n}{6}$ . Uspořádané znázornění zobrazení jednotlivých výpočtů do daných intervalů je zobrazeno na obrázku 33.



Obrázek 33: Rozložení intervalu  $\langle 1, \frac{n}{3} \rangle$  na jednotlivé pod intervaly podle příslušných předpisů vypočtu labelů

Nyní se podívejme na labely z intervalu  $(\frac{n}{3}, n+1)$ . Předpisem  $\frac{n+2}{2} - v_{2j} + v_{1j}$ , dostaneme labely z intervalu  $(\frac{n}{3}, \frac{n}{2})$ . Labely z intervalu  $(\frac{n}{2} + 2, \frac{2n}{3} + 1)$  budou odpovídat předpisu  $\frac{n+2}{2} + v_{2j} - v_{1j}$  (připomeňme, že chybějící label  $\frac{n}{2} + 1$  v posloupnosti labelů není, protože  $\ell = \frac{n}{2} + 1$ ). Poslední dva předpisy, tedy předpis  $n + 2 - v_{1j}$  a předpis  $n + 2 - v_{2j}$  bude reprezentovat labely dané intervalem  $\langle \frac{2n}{3} + 2, n + 1 \rangle$ . Grafické znázornění výše popsaného je znázorněno na obrázku 34 (červeně je znázorněn vynechaný label  $\frac{n+2}{2}$ ).



Obrázek 34: Rozložení intervalu  $(\frac{n}{3}, n+1)$  na jednotlivé pod intervaly, podle příslušných předpisů vypočtu labelů

Protože jsme ukázali, že každý vzor má svůj obraz, navíc každá hodnota je zastoupena v intervalu  $\langle 1, 2, \dots, \frac{n+2}{2} - 1, \frac{n+2}{2} + 1, \frac{n+2}{2} + 2, \dots, n + 1 \rangle$  pouze jednou, jedná se o bijektivní zobrazení.

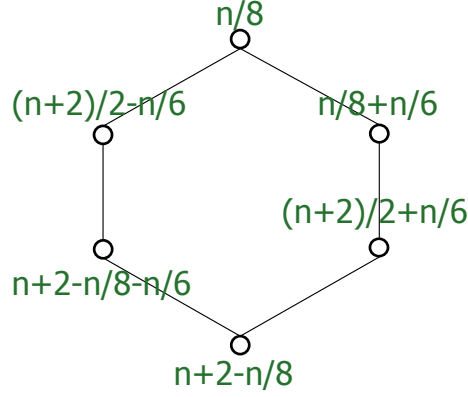
### 3) Upravené hendikepové ohodnocení:

Nyní ukážeme, že výše popsané zobrazení je zobrazení z definice 6.1, tedy upravené hendikepové ohodnocení. Budeme postupovat následujícím způsobem. Nejprve vyjádříme všechny možnosti uspořádání vrcholů cyklu  $C_6$ , které mohou nastat, tyto možnosti jsou zobrazeny na obrázku 35 až 40. Následně pro každý vrchol v jednotlivých variantách cyklů vypočteme jeho váhu. Váhu budeme počítat dvojím způsobem, nejprve podle definice 6.1, tedy  $w_f(v) = \ell + f(v)$  a za druhé vypočítáme váhu vrcholů jako součet labelů jeho sousedů. Pokud oběma postupy vypočtené váhy budou pro všechny vrcholy ve všech variantách stejné, je námi zadefinované zobrazení upravené hendikepové ohodnocení.



i) Předpokládejme  $j = 1$ .

Cyklus  $C_6$  bude mít uspořádání labelů vrcholů, které je znázorněné na obrázku 35.



Obrázek 35: Varianta uspořádání labelů pro  $j = 1$ .

Nyní vypočteme jednotlivé váhy oběma způsoby:

Vrchol  $v_{1j}$ :

$$w_f(v_{1j}) = \ell + f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{8} = \frac{5n}{8} + 1$$

$$w_f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} - \frac{n}{6} + \frac{n}{8} + \frac{n}{6} = \frac{5n}{8} + 1$$

Vrchol  $v_{2j}$ :

$$w_f(v_{2j}) = \ell + f(v_{2j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{8} + \frac{n}{6} = \frac{19n}{24} + 1$$

$$w_f(v_{2j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{8} + \frac{n}{6} = \frac{19n}{24} + 1$$

Vrchol  $v_{3j}$ :

$$w_f(v_{3j}) = \ell + f(v_{3j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{14n+24}{12}$$

$$w_f(v_{3j}) = \frac{n}{8} + \frac{n}{6} + (n+2) - \frac{n}{8} = \frac{14n+24}{12}$$

Vrchol  $v_{4j}$ :

$$w_f(v_{4j}) = \ell + f(v_{4j}) = \frac{n+2}{2} + (n+2) - \frac{n}{8} = \frac{11n+24}{8}$$

$$w_f(v_{4j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{6} + (n+2) - \frac{n}{8} - \frac{n}{6} = \frac{11n+24}{8}$$

Vrchol  $v_{5j}$ :

$$w_f(v_{5j}) = \ell + f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} + (n+2) - \frac{n}{8} - \frac{n}{6} = \frac{29n+72}{24}$$

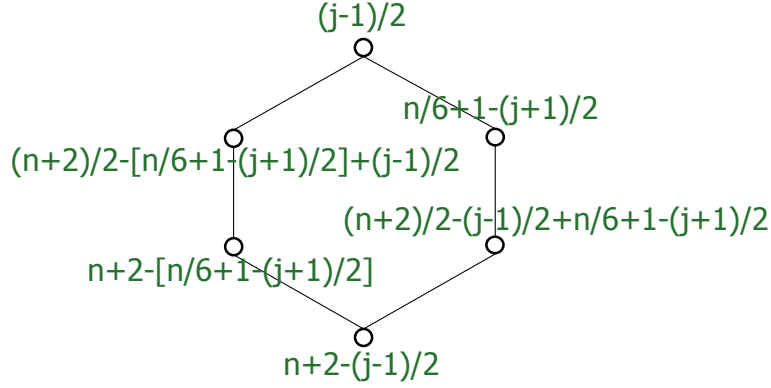
$$w_f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} + (n+2) - \frac{n}{8} - \frac{n}{6} = \frac{29n+72}{24}$$

Vrchol  $v_{6j}$ :

$$w_f(v_{6j}) = \ell + f(v_{6j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - \frac{n}{6} = \frac{10n+24}{12}$$

$$w_f(v_{6j}) = (n+2) - \frac{n}{8} - \frac{n}{6} + \frac{n}{8} = \frac{10n+24}{12}$$

ii) Předpokládejme  $j$  liché,  $j > 1$  a  $1 < j < \frac{n}{12}$ .  
 Cyklus  $C_6$  bude mít uspořádání labelů vrcholů, které je znázorněné na obrázku 36.



Obrázek 36: Varianta uspořádání labelů pro  $j$  liché,  $j > 1$  a  $1 < j < \frac{n}{12}$ .

Nyní vypočteme jednotlivé váhy oběma způsoby:

Vrchol  $v_{1j}$ :

$$w_f(v_{1j}) = \ell + f(v_{1j}) = \frac{6n+6j+6}{12}$$

$$w_f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} - \left(\frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2}\right) + \frac{j-1}{2} + \frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2} = \frac{6n+6j+6}{2}$$

Vrchol  $v_{2j}$ :

$$w_f(v_{2j}) = \ell + f(v_{2j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2} = \frac{-6j+8n+18}{12}$$

$$w_f(v_{2j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2} - \frac{j-1}{2} + \frac{j-1}{2} = \frac{-6j+8n+18}{12}$$

Vrchol  $v_{3j}$ :

$$w_f(v_{3j}) = \ell + f(v_{3j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - \frac{j-1}{2} + \frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2} = \frac{-12j+14n+36}{12}$$

$$w_f(v_{3j}) = \frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2} + n + 2 - \frac{j-1}{2} = \frac{-12j+14n+36}{12}$$

Vrchol  $v_{4j}$ :

$$w_f(v_{4j}) = \ell + f(v_{4j}) = \frac{n+2}{2} - \frac{j-1}{2} + n + 2 = \frac{-6j+18n+42}{12}$$

$$w_f(v_{4j}) = n + 2 - \left(\frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2}\right) + \frac{n+2}{2} - \frac{j-1}{2} + \frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2} = \frac{-6j+18n+42}{12}$$

Vrchol  $v_{5j}$ :

$$w_f(v_{5j}) = \ell + f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - \left(\frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2}\right) = \frac{6j+16n+30}{12}$$

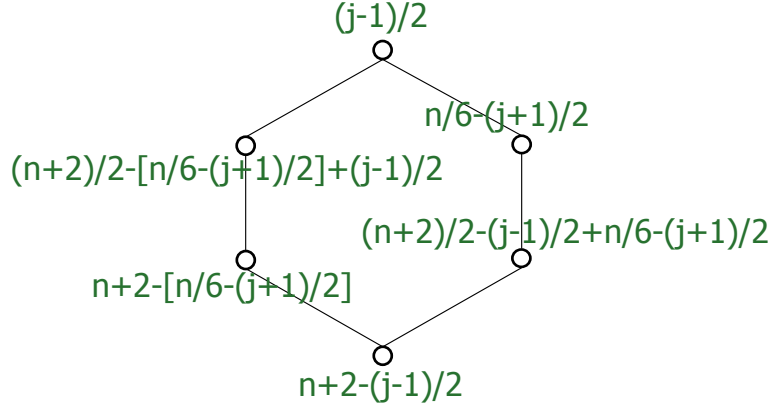
$$w_f(v_{5j}) = n + 2 - \frac{j-1}{2} + \frac{n+2}{2} - \left(\frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2}\right) + \frac{j-1}{2} = \frac{6j+16n+30}{12}$$

Vrchol  $v_{6j}$ :

$$w_f(v_{6j}) = \ell + f(v_{6j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - \left(\frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2}\right) + \frac{j-1}{2} = \frac{10n+12j+12}{12}$$

$$w_f(v_{6j}) = \frac{j-1}{2} + n + 2 - \left(\frac{n}{6} + 1 - \frac{j+1}{2}\right) = \frac{10n+12j+12}{12}$$

iii) Předpokládejme  $j$  liché,  $j > 1$  a  $j > \frac{n}{12}$ .  
 Cyklus  $C_6$  bude mít uspořádání labelů vrcholů, které je znázorněné na obrázku 37.



Obrázek 37: Varianta uspořádání labelů pro  $j$  liché,  $j > 1$  a  $j > \frac{n}{12}$ .

Nyní vypočteme jednotlivé váhy oběma způsoby:

Vrchol  $v_{1j}$ :

$$w_f(v_{1j}) = \ell + f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{j-1}{2} = \frac{6n+6+6j}{12}$$

$$w_f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} - \left(\frac{n}{6} - \frac{j+1}{2}\right) + \frac{j-1}{2} + \frac{n}{6} - \frac{j+1}{2} = \frac{6n+6+6j}{12}$$

Vrchol  $v_{2j}$ :

$$w_f(v_{2j}) = \ell + f(v_{2j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{6} - \frac{j+1}{2} = \frac{-6j+8n+6}{12}$$

$$w_f(v_{2j}) = \frac{j-1}{2} + \frac{n+2}{2} - \frac{j-1}{2} + \frac{n}{6} - \frac{j+1}{2} = \frac{-6j+8n+6}{12}$$

Vrchol  $v_{3j}$ :

$$w_f(v_{3j}) = \ell + f(v_{3j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - \frac{j-1}{2} + \frac{n}{6} - \frac{j+1}{2} = \frac{-12j+14n+24}{12}$$

$$w_f(v_{3j}) = n + 2 - \frac{j+1}{2} + \frac{n}{6} - \frac{j+1}{2} = \frac{-12j+14n+24}{12}$$

Vrchol  $v_{4j}$ :

$$w_f(v_{4j}) = \ell + f(v_{4j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - \frac{j-1}{2} = \frac{-6j+18n+42}{12}$$

$$w_f(v_{4j}) = \frac{n+2}{2} - \frac{j-1}{2} + \frac{n}{6} - \frac{j+1}{2} + n + 2 - \left(\frac{n}{6} - \frac{j+1}{2}\right) = \frac{-6j+18n+42}{12}$$

Vrchol  $v_{5j}$ :

$$w_f(v_{5j}) = \ell + f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - \left(\frac{n}{6} - \frac{j+1}{2}\right) = \frac{6j+16n+42}{12}$$

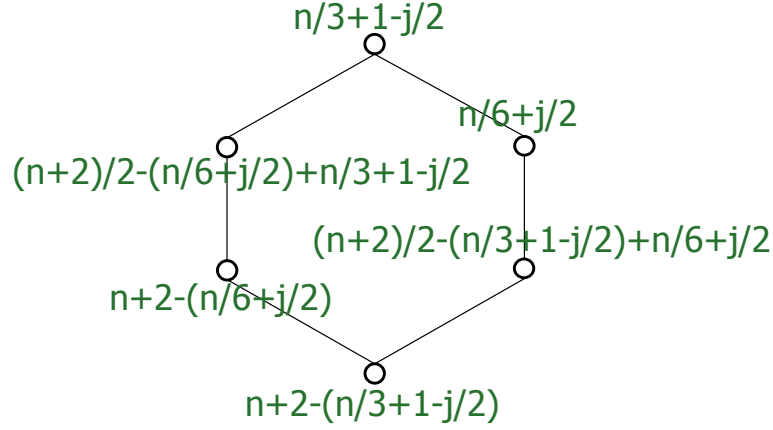
$$w_f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} - \left(\frac{n}{6} - \frac{j+1}{2}\right) + \frac{j-1}{2} + n + 2 - \frac{j-1}{2} = \frac{6j+16n+42}{12}$$

Vrchol  $v_{6j}$ :

$$w_f(v_{6j}) = \ell + f(v_{6j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - \left(\frac{n}{6} - \frac{j+1}{2}\right) + \frac{j-1}{2} = \frac{12j+10n+24}{12}$$

$$w_f(v_{6j}) = \frac{j-1}{2} + n + 2 - \left(\frac{n}{6} - \frac{j+1}{2}\right) = \frac{12j+10n+24}{12}$$

iv) Předpokládejme  $j$  sudé a  $j \leq \frac{n}{12}$ , tedy platí i  $j < \frac{n}{6}$ .  
Cyklus  $C_6$  bude mít uspořádání labelů vrcholů, které je znázorněné na obrázku 38.



Obrázek 38: Varianta uspořádání labelů pro  $j$  sudé a  $j \leq \frac{n}{12}$ .

Nyní vypočteme jednotlivé váhy oběma způsoby:

Vrchol  $v_{1j}$ :

$$w_f(v_{1j}) = \ell + f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2} = \frac{-6j+10n+24}{12}$$

$$w_f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2} + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{-6j+10n+24}{12}$$

Vrchol  $v_{2j}$ :

$$w_f(v_{2j}) = \ell + f(v_{2j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{6j+8n+12}{12}$$

$$w_f(v_{2j}) = \frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2} + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2}) + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{6j+8n+12}{12}$$

Vrchol  $v_{3j}$ :

$$w_f(v_{3j}) = \ell + f(v_{3j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2}) + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{12j+10n+12}{12}$$

$$w_f(v_{3j}) = \frac{j}{2} + \frac{n}{6} + n + 2 - (\frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2}) = \frac{12j+10n+12}{12}$$

Vrchol  $v_{4j}$ :

$$w_f(v_{4j}) = \ell + f(v_{4j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - (\frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2}) = \frac{6j+14n+24}{12}$$

$$w_f(v_{4j}) = n + 2 - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2}) + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{6j+14n+24}{12}$$

Vrchol  $v_{5j}$ :

$$w_f(v_{5j}) = \ell + f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) = \frac{-6j+16n+36}{12}$$

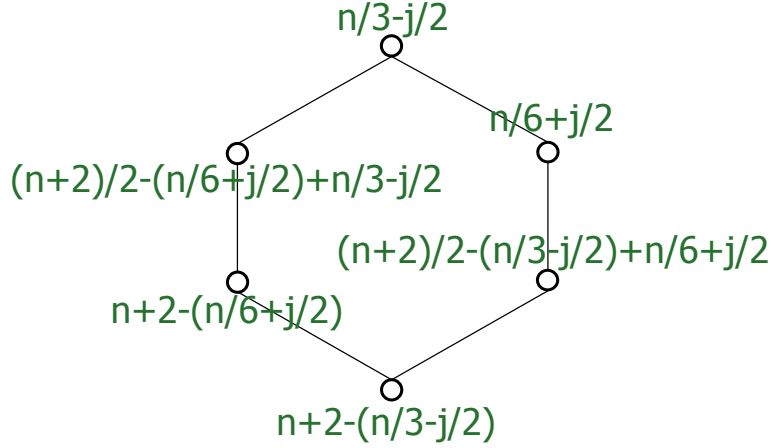
$$w_f(v_{5j}) = n + 2 - (\frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2}) + \frac{n+2}{2} - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2} = \frac{-6j+16n+36}{12}$$

Vrchol  $v_{6j}$ :

$$w_f(v_{6j}) = \ell + f(v_{6j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2} = \frac{-12j+14n+36}{12}$$

$$w_f(v_{6j}) = \frac{n}{3} + 1 - \frac{j}{2} + n + 2 - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) = \frac{-12j+14n+36}{12}$$

v) Předpokládejme  $j$  sudé,  $j > \frac{n}{12}$  a  $j < \frac{n}{6}$ .  
Cyklus  $C_6$  bude mít uspořádání labelů vrcholů, které je znázorněné na obrázku 39.



Obrázek 39: Varianta uspořádání labelů pro  $j$  sudé,  $j > \frac{n}{12}$  a  $j < \frac{n}{6}$ .

Nyní vypočteme jednotlivé váhy oběma způsoby:

Vrchol  $v_{1j}$ :

$$w_f(v_{1j}) = \ell + f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{3} - \frac{j}{2} = \frac{-6j+10n+12}{12}$$

$$w_f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{n}{3} - \frac{j}{2} + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{-6j+10n+12}{12}$$

Vrchol  $v_{2j}$ :

$$w_f(v_{2j}) = \ell + f(v_{2j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{6j+8n+12}{12}$$

$$w_f(v_{2j}) = \frac{n}{3} - \frac{j}{2} + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{6j+8n+12}{12}$$

Vrchol  $v_{3j}$ :

$$w_f(v_{3j}) = \ell + f(v_{3j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{10n+12j+24}{12}$$

$$w_f(v_{3j}) = \frac{j}{2} + \frac{n}{6} + n + 2 - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) = \frac{10n+12j+24}{12}$$

Vrchol  $v_{4j}$ :

$$w_f(v_{4j}) = \ell + f(v_{4j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) = \frac{10n+6j+36}{12}$$

$$w_f(v_{4j}) = n + 2 - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) + \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{10n+6j+36}{12}$$

Vrchol  $v_{5j}$ :

$$w_f(v_{5j}) = \ell + f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) = \frac{-6j+16n+36}{12}$$

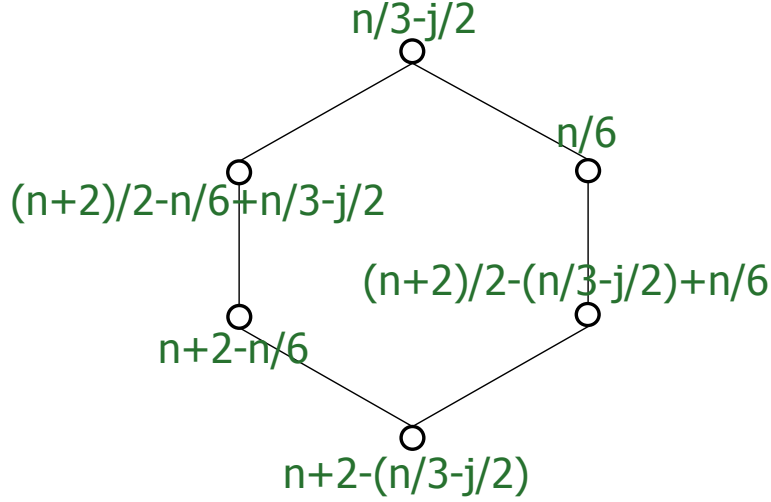
$$w_f(v_{5j}) = n + 2 - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) + \frac{n+2}{2} - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{n}{3} - \frac{j}{2} = \frac{-6j+16n+36}{12}$$

Vrchol  $v_{6j}$ :

$$w_f(v_{6j}) = \ell + f(v_{6j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{n}{3} - \frac{j}{2} = \frac{-12j+14n+24}{12}$$

$$w_f(v_{6j}) = \frac{n}{3} - \frac{j}{2} + n + 2 - (\frac{j}{2} + \frac{n}{6}) = \frac{-12j+14n+24}{12}$$

vi) Předpokládejme  $j$  sudé a  $j = \frac{n}{6}$ , tedy platí i  $j > \frac{n}{12}$ .  
 Cyklus  $C_6$  bude mít uspořádání labelů vrcholů, které je znázorněné na obrázku 40.



Obrázek 40: Varianta uspořádání labelů pro  $j$  sudé a  $j = \frac{n}{6}$ .

Nyní vypočtěme jednotlivé váhy oběma způsoby:

Vrchol  $v_{1j}$ :

$$w_f(v_{1j}) = \ell + f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{3} - \frac{j}{2} = \frac{-6j+10n+12}{12}$$

$$w_f(v_{1j}) = \frac{n+2}{2} - \frac{n}{6} + \frac{n}{3} - \frac{j}{2} + \frac{n}{6} = \frac{-6j+10n+12}{12}$$

Vrchol  $v_{2j}$ :

$$w_f(v_{2j}) = \ell + f(v_{2j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{8n+12}{12}$$

$$w_f(v_{2j}) = \frac{n}{3} - \frac{j}{2} + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) + \frac{n}{6} = \frac{8n+12}{12}$$

Vrchol  $v_{3j}$ :

$$w_f(v_{3j}) = \ell + f(v_{3j}) = \frac{n+2}{2} + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) + \frac{n}{6} = \frac{6j+10n+24}{12}$$

$$w_f(v_{3j}) = \frac{n}{6} + n + 2 - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) = \frac{6j+10n+24}{12}$$

Vrchol  $v_{4j}$ :

$$w_f(v_{4j}) = \ell + f(v_{4j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) = \frac{6j+14n+36}{12}$$

$$w_f(v_{4j}) = n + 2 - \frac{n}{6} + \frac{n+2}{2} - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) + \frac{n}{6} = \frac{6j+14n+36}{12}$$

Vrchol  $v_{5j}$ :

$$w_f(v_{5j}) = \ell + f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} + n + 2 - \frac{n}{6} = \frac{16n+36}{12}$$

$$w_f(v_{5j}) = \frac{n+2}{2} - \frac{n}{6} + \frac{n}{3} - \frac{j}{2} + n + 2 - (\frac{n}{3} - \frac{j}{2}) = \frac{16n+36}{12}$$

Vrchol  $v_{6j}$ :

$$w_f(v_{6j}) = \ell + f(v_{6j}) = \frac{n+2}{2} - \frac{n}{6} + \frac{n}{3} - \frac{j}{2} + \frac{n+2}{2} = \frac{-6j+14n+24}{12}$$

$$w_f(v_{6j}) = \frac{n}{3} - \frac{j}{2} + n + 2 - \frac{n}{6} = \frac{-6j+14n+24}{12}$$

Dané zobrazení je tedy upravené hendikepové ohodnocení.

Ukázali jsme, že pro 2-pravidelný graf  $G$  existuje upravené hendikepové ohodnocení jen když  $n \equiv 0 \pmod{24}$ .  $\square$

V dalším textu budeme využívat následující definici a pomocné tvrzení.

**Definice 6.2.** [9] *Skolemova posloupnost řádu  $n$  je posloupnost  $S = (s_1, s_2, \dots, s_{2n})$  o  $2n$  číslech, splňující následující dvě podmínky:*

1. *Pro každé  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  existují přesně dvě čísla  $s_x, s_y$  tak že  $s_x = s_y = k$ .*
2. *Pokud  $s_x = s_y = k$ , pak  $y - x = k$ .*

Uvedme nyní pro tuto řadu nutnou a postačující podmínku.

**Tvrzení 6.2.** [9] *Skolemova posloupnost existuje pouze tehdy a jen tehdy, pokud  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Tato podmínka je nutná zároveň i postačující.*

**Věta 6.4.** *Mějme 2-pravidelný graf  $G$  na  $n$  vrcholech. V grafu  $G$  může existovat upravené hendikepové ohodnocení jestliže  $n \equiv 6 \pmod{24}$*

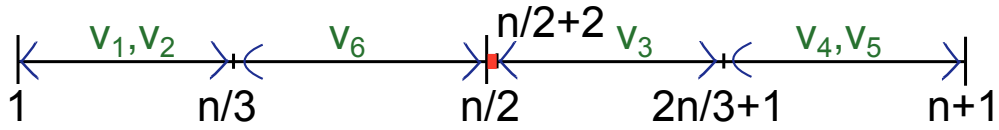
*Důkaz.* Důkaz provedeme konstruktivní metodou. Využijeme výše uvedené Skolemovy posloupnosti. Pomocí této posloupnosti určíme labely vrcholů  $v_{1j}$  a  $v_{2j}$  (předpokládáme uspořádání vrcholů znázorněné na obrázku 32). Zbylé labely dopočítáme pomocí věty 6.1. Například Skolemova posloupnost řádu pět ( $\frac{n}{3} = 10$ ) má následující tvar: 2, 4, 2, 3, 5, 4, 3, 1, 1, 5. Labely vrcholů  $v_{ij}$  a  $v_{i+1,j}$  určíme jako čísla, které mají ve Skolemově řadě index  $i$ , v tomto případě tedy  $v_{11} = 8$  a  $v_{12} = 9$ , kde  $i \in \{1, 2, 3, \dots, \frac{n}{3}\}$ .

Obecně labely jednotlivým vrcholům budeme přiřazovat podle následujícího předpisu:

$$\lambda(v_{ij}) = \begin{cases} x & i = 1, \\ y & i = 2, \\ \frac{n+2}{2} - v_{1j} + v_{2j}, & i = 3, \\ n + 2 - v_{1j} & i = 4, \\ n + 2 - v_{2j} & i = 5, \\ \frac{n+2}{2} - v_{2j} + v_{1j}, & i = 6. \end{cases}$$

Pomocí prvních dvou řádků předpisu určíme labely vrcholů grafu  $G$  v intervalu  $\langle 1, \frac{n}{3} \rangle$ . V takto zhotovené posloupnosti labelů se žádné číslo nebude opakovat a navíc v intervalu  $\langle 1, \frac{n}{3} \rangle$  budou zastoupeny všechny hodnoty. Protože žádný index se ve Skolemově posloupnosti neopakuje, je zřejmé, že rozdíl  $v_{1j} - v_{2j}$  se nebude rovnat součtu  $v_{1j} + v_{2j}$ . Nyní předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že hodnota labelu vrcholu  $v_{1j}$  je menší, než hodnota vrcholu  $v_{2j}$ , pak vrchol  $v_{3j}$  bude nabývat hodnot labelů z intervalu  $\langle \frac{n}{2} + 2, \frac{2n}{3} + 1 \rangle$ . Vrcholy  $v_{4j}, v_{5j}$ , budou mít hodnoty z intervalu  $(\frac{2n}{3} + 1, n + 1)$  a zbývající hodnoty labelů, tedy hodnoty z interval  $(\frac{n}{3}, \frac{n}{2})$  budou zastoupeny vrcholem  $v_{6j}$ . Na obrázku 41 je znázorněno jednotlivé rozmístění labelů v grafu  $G$ . Hodnota znázorněná červenou barvou, znázorňuje vynechaný label  $\frac{n+2}{2}$ .

Tato konstrukce lze aplikovat i na grafy, pro něž platí  $n \equiv 0 \pmod{24}$ . □



Obrázek 41: Znázornění hodnot labelů, které budou nabývat jednotlivé vrcholy

Shrňme nyní výše dosažené výsledky do následující věty:

**Věta 6.5.** *2- pravidelný upravený hendikepový graf existuje pouze pro  $n \equiv 0, 6 \pmod{24}$ . Navíc každá komponenta je izomorfní s grafem  $C_6$ .*

*Důkaz.* Z věty 6.1 plyne, že pokud 2-pravidelný graf  $G$  obsahuje upravené hendikepové ohodnocení, pak je každá komponenta tohoto grafu isomorfní s cyklem  $C_6$ .

Nutná podmínka existence upraveného hendikepového ohodnocení pro 2-pravidelné grafy je ve větě 6.2 a říká nám, že počet vrcholů  $n$  v grafu  $G$  musí mít následující tvar:

$$n \equiv 0, 6 \pmod{24}.$$

Konstrukce 2-pravidelných grafů s upraveným hendikepovým ohodnocením je pro jednotlivé případy v následujících dvou větách.:

- pro  $n \equiv 0 \pmod{24}$  věta 6.3,
- pro  $n \equiv 0, 6 \pmod{24}$  věta 6.4.

□



## 7 Závěr

Tato diplomová práce se zabývá problematikou grafových ohodnocení (zejména magických grafových ohodnocení) a jejich možným zobecněním i na třídy grafu, kde dané ohodnocení dle klasické definice neexistuje. Jsou zde uvedeny praktické aplikace magických ohodnocení pro plánování sportovních turnajů. V kapitole 3 je sepsán přehled některých vybraných významných grafových ohodnocení spolu s příslušnými dosud známými výsledky. Pro snadnější pochopení definic a výsledku pro jednotlivé ohodnocení uvádíme v kapitole 2 základní pojmy z teorie grafů, které souvisejí s danou problematikou.

Hlavní výsledek práce je definice takzvaného upraveného hendikepového ohodnocení (UHO) a kompletní vyřešení jeho existence pro 2-pravidelné grafy. UHO je zobecněním již známého hendikepového ohodnocení, kdy uvolnění požadavku na uspořádání labelů vrcholů do aritmetické posloupnosti  $\{1, 2, \dots, n\}$  (labely jsou uspořádány do posloupnosti  $\{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \cup \{\frac{n+4}{2}, \dots, n+1\}$ , tedy je vynechán label  $\frac{n+2}{2}$ ) umožňuje aplikaci tohoto ohodnocení i na grafy, kde existence klasického hendikepového ohodnocení je vyloučena větami 4.2 a 4.3.

Ukázali jsme, že nejmenší graf obsahující toto zobecněné ohodnocení je cyklus  $C_6$ , který je zobrazen na obrázku 25. Dále jsme dokázali, že pokud obsaue 2-pravidelný graf UHO, je každá komponenta tohoto grafu izomorfní s cyklem  $C_6$  (věta 6.1). Jako důkazovou techniku této věty jsme použili spor, při důkazu jsme také sestavili schéma, které nám ukazuje, jakým způsobem cyklus  $C_6$  sestavit tak, aby váhy pro jednotlivé vrcholy  $v_i$  odpovídaly (obrázek 29). Jsou zde zformulovány dva možné způsoby konstrukce upraveného hendikepového ohodnocení pro 2-pravidelné grafy. První z těchto konstrukcí je založena na tvrzení z článku [8] a lze jej aplikovat na 2-pravidelné grafy, pro které platí  $n \equiv 0 \pmod{24}$ . Druhá konstrukce vychází ze Skolemových posloupností a lze ji aplikovat jak na grafy, pro které platí  $n \equiv 0 \pmod{24}$ , tak i na grafy kde  $n \equiv 6 \pmod{24}$ . Ve větě 6.2 jsme ukázali nutné podmínky existence. Důsledkem této věty pro zbylé dva případy ( $n \equiv 12, 18 \pmod{24}$ ) 2-pravidelných grafů UHO neexistuje.

Všechny tyto výsledky jsou shrnuty ve větě 6.5, která je jádrem této diplomové práce.

Očekáváme, že upravené hendikepové ohodnocení bude možné aplikovat i na některé třídy 3-pravidelných grafů. Z časového hlediska se nám nepodařilo prošetřit pro které. Tato otázka tedy zůstává otevřená pro další možné zájemce o tuto problematiku.

## 8 Seznam literatury

- [1] S.ARUMUGAN, D. FRONČEK a N. KAMATCHI. Distance Magic-Graphs A Survey, J. Indonesia. Math. 2011, s. 11-26.
- [2] D.FRONČEK, P.KOVÁŘ A T. KOVÁŘOVÁ, Fair incomplete tournaments, Bulletin of the ICA, 48, 2006, s. 31-33.
- [3] P.KOVÁŘ, T. KOVÁŘOVÁ a D. FRONČEK. A not on 4-regular distance magic graphs. 2012, roč. 54, s. 127-132.
- [4] P.KOVÁŘ, A.SILBER, P.KABELÍKOVÁ a M.KRAVČENKO, On Regular distance magic graphs of odd order, (Submitted).
- [5] P. KOVÁŘ, B. KRAJC, On handicap labeling of graphs, (Manuscript).
- [6] D. FRONČEK, Handicap incomplete tournaments and ordered distance antimagic graphs. Accepted.
- [7] D. FRONČEK, Ordered distance antimagic graphs and handicap incomplete tournaments. Submitted, s. 1-9.
- [8] A. ROSA, On certain valuations of the vertices of a graph, Theory of Graphs. 1966, s. 349-355.
- [9] Th. Skolem, On certain distributions of integers in pairs with given differences, Math. Scand. 5 1957, 57-68.
- [10] P. Kovář, Teorie Grafů (Učební text), VŠB-TU Ostrava, 2012.
- [11] M. KRBEČEK, Aplikace 1-VMV ohodnocení grafů. Ostrava, 2012. Bakalářská práce. VŠB-TU Ostrava. Vedoucí práce P. Kovář.